بسمه تعالی

جزوه درس

کنترل خطی

دانشجویان آموزشکده فنی شهربابک

بخش اول:

آشنایی با مبانی کنترل خطی

بخش اول: آشنایی با مبانی کنترل خطی

۱-۱- مقدمه

بخش مهم و ناگسستنی از فرایندهای صنعتی امروزی، کنترل خودکار می باشد. کنترل خودکار در پیشرفت علوم مهندسی نقش حیاتی داشته است. از آنجا که پیشرفت نظریه کنترل خودکار و کاربردهای آن عامل دستیابی به کارایی بهینه سیستمهای دینامیکی، افزایش بازده و تسهیل کارهای دستی است، درک درست از مباحث کنترلی، آشنایی با روشهای تحلیل سیستمهای موجود و طراحی سیستم های جدید کنترلی بر مبنای خواسته های مطلوب، از مهمترین موضوعاتیست که مهندسین امروزی باید با آن آشنا باشند.

در این جزوه مباحث اصلی کنترلی که درک آنها برای تحلیل و طراحی سیستم های خطی تک ورودی – تک خروجی لازم است تا حد ممکن گنجانده شده است.

۱-۲- تعاریف مهم:

در ابتدا لازم است با تعاریف اصلی که در متن جزوه آمده است، آشنا شویم:

۱- **متغیر کنترل و متغیر تاثیرپذیر:** متغیر تحت کنترل، کمیت یا شرطی است که اندازه گیری می شود. متغیر تأثیرپذیر کمیت یا شرطی است که تغییر داده می شود تا بر متغیر تحت کنترل تاثیر بگذارد. معمولاً متغیر تحت کنترل خروجی سیستم است. منظور از کنترل، اندازی گیری متغیر تحت کنترل و تغییر متغیر تاثیر پذیر برای رساندن متغیر تحت کنترل به مقدار مطلوب است.

۲- **دستگاه:** دستگاه می تواند بخشی از یک وسیله، یا هر جسم فیزیکی تحت کنترل (بطور مثال کوره گرمایش، راکتور شیمیایی، موتور و ...) باشد.

۳- **فرآیند:** فرآیند مجموعه اعمالی است که بصورتی معین یکی پس از دیگری انجام شده تا هدف معینی برآورده گردد.

۴- **سیستم:** سیستم ترکیبی از اجزاست که با هم و برای انجام عملی خاص کار می کنند. سیستم تنها سیستم فیزیکی نیست. مفهوم سیستم را می توان به پدیده های پویای انتزاعی، مثلا پدیده های اقتصادی، زیستی و ... نیز تعمیم داد.

۵- **سیگنال:** هر کمیت متغیر نسبت به زمان سیگنال می‌باشد.

۶- **اغتشاش:** اغتشاش سیگنالیست که در جهت تغییر شدید خروجی یک سیستم عمل می کند. اگر اغتشاش در داخل یک سیستم تولید شود آن را داخلی می نامیم، اغتشاش خارجی در خارج سیستم تولید می شود و یک نوع ورودی (سیگنال تحریک) برای سیستم محسوب می شود.

۷- **پاسخ:** خروجی (عکس العمل) یک سیستم به ورودی مشخص را پاسخ سیستم می نامند.

۸- **کنترل با فیدبک:** منظور از کنترل با فیدبک، عملی است که می کوشد در حضور اغتشاش اختلاف بین خروجی سیستم و ورودی مرجع را به حداقل ممکن برساند.

۱-۳- یادآوری مبانی ریاضی سیستم های کنترلی:

۱-۳-۱- معادلات دیفرانسیلی:

معادلات دیفرانسیل به معادلاتی گفته می شود که بر حسب یک متغیر و مشتقات مرتبه بالاتر آن بیان می گردند.

بزرگترین مرتبه مشتق متغیر مورد نظر، مرتبه معادله دیفرانسیل نامیده می شود. بطور مثال رابطه ۱-۱ یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n [۱]است.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \qquad ۱-۱$$

تابع $f(t)$ که تابع ورودی نامیده می شود نوع معادله را تعیین می کند. اگر این تابع متحد با صفر باشد معادله دیفرانسیل را همگن و اگر مقدار داشته باشد غیر همگن نامیده می شود.
یکی از روش های حل معادله دیفرانسیل (بدست آوردن $y(t)$) استفاده از تبدیل لاپلاس می باشد.

۱-۳-۲- تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک ابزار قدرتمند ریاضیست که در حل بسیاری از مسائل کاربردی رشته مهندسی کنترل مورد استفاده قرار می گیرد.
تبدیل لاپلاس[۲] بر روی توابعی تعریف می گردد که در دامنه $t \geq 0$ تعریف شده باشند. اگر تابعی این شرط را داشته باشد، تبدیل لاپلاس آن بصورت رابطه ۱-۲ خواهد بود.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad ۲-۱$$

که در آن $\mathcal{L}\{\ \}$ عملگر تبدیل لاپلاس، $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و s یک متغیر مختلط به فرم $s = \alpha + j\omega$ می باشد. با چند مثال به یادآوری مبحث تبدیل لاپلاس می پردازیم:

◄ مثال ۱-۱

تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

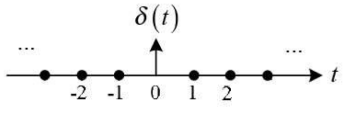
۱) $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

حل:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 \times e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_0^{-\infty} = \frac{-1}{s}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

۲) $\delta(t) = \begin{cases} \text{نامعلوم} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

حل:



برای تابع ضربه می دانیم:

---

[۱] مشتق مرتبه nام یک سیگنال را به فرم $\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$ یا $y^{(n)}(t)$ نمایش می دهند.

[۲] که در واقع آنچه ما بعنوان تبدیل لاپلاس می خوانیم تبدیل لاپلاس یک طرفه نام دارد.

$$1)\ f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$

بنابراین تبدیل لاپلاس آن برابر است با:

$$L\{\delta(t)\}=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt\overset{t_0=0}{=}\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\times e^{0}dt=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$

۳) $f(t)=te^{-3t}u(t)$

حل:

$$L\{f(t)\}=\int_{0}^{+\infty}\left(te^{-3t}u(t)\right)e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty}te^{-3t}\times e^{-st}dt=\int_{0}^{+\infty}te^{-(s+3)t}dt$$

$$=\left(\frac{-1}{(s+3)}te^{-(s+3)t}-\frac{1}{(s+3)^2}e^{-(s+3)t}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$=\left(0-\frac{1}{(s+3)^2}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{(s+3)^2}$$

انتگرال	مشتق
$e^{-(s+3)t}$	t
$\frac{-1}{(s+3)}e^{-(s+3)t}$	1 $-$
$\frac{1}{(s+3)^2}e^{-(s+3)t}$	0

اکنون که روش محاسبه تبدیل لاپلاس را یادگرفتیم، دیگر برای توابع معروف می توانیم از جدول تبدیل لاپلاس استفاده نماییم.

جدول ۱-۱ جدول زوج تبدیلات لاپلاس

	$x(t)$	$X(s)$
۱	$\delta(t)$	1
۲	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
۳	$t.u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
۴	$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۵	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
۶	$t^n.e^{-at}.u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
۷	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
۸	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
۹	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
۱۰	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

جدول ۱-۲ جدول خواص تبدیل لاپلاس

ردیف	$x(t)$	$X(s)$
۱	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$
۲	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
۳	$f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$
۴	$e^{s_0 t}f(t)$	$F(s-s_0)$
۷	$t^k.f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{dz^n}$
۷	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}\frac{df(0)}{dt}-s^{n-2}\frac{d^2f(0)}{dt^2}-\cdots-s^{n-1}\frac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}}$
۸	$\int_0^\infty f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
۹	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
۱۰	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}F_1(p)F_2(s-p)dp$

با یک مثال این مبحث را یادآوری می نماییم:

مثال ۱-۲

تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=3e^{3t}u(t-2)$

حل:

$$L\{3e^{3t}u(t-2)\}=3L\{e^{3(t-2+2)}u(t-2)\}=3L\{e^6e^{3(t-2)}u(t-2)\}=3e^6L\{e^{3(t-2)}u(t-2)\}$$

$$\xrightarrow{T.1.1.5\,!\,T.1.2.3}L\{f(t)\}=3e^6\left(\frac{e^{-2s}}{s+3}\right)$$

۲) $f(t)=t^2\sin(2t)$

حل:

$$L\{t^2\sin(2t)\}\underset{\omega=2}{\overset{T.1.2.7}{=}}(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{-4(s^2+4)^{\cancel{2}\,1}-2\cancel{(s^2+4)}(2s)(-4s)}{(s^2+4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

۱-۳-۳- قضایای تبدیل لاپلاس:

دو قضیه اصلی تبدیل لاپلاس عبارتند از:

❖ **قضیه مقدار اولیه:**

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

❖ **قضیه مقدار نهایی:**

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

◄ مثال ۱-۳

اگر داشته باشیم:

$$F(s)=\frac{s^2+1}{s^3+s+5}$$

مقدار $f(0)$ و $\lim_{t\to\infty} f(t)$ را محاسبه نمایید:

حل:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty} s\times\frac{s^2+1}{s^3+s+5}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3+s}{s^3+s+5}=1$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0} s\times\frac{s^2+1}{s^3+s+5}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3+s}{s^3+s+5}=0$$

۱-۳-۴- عکس تبدیل لاپلاس:

برای محاسبه تابع زمانی از روی تابع حوزه لاپلاس باید از عکس تبدیل لاپلاس استفاده نمود:

$$L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{0}^{+\infty} F(s)e^{st}ds \quad t\geq 0 \qquad ۱-۳$$

از آنجا که رابطه انتگرالی عکس تبدیل لاپلاس، حل اینگونه مسائل را پیچیده می کند، برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس تاجای ممکن از جدول ۱-۱ استفاده می کنیم.

با یک نگاه دقیق به جدول ۱-۱ می بینیم که تمامی توابع حوزه لاپلاس فرم کلی کسری دارند، بنابراین برای استفاده از جدول ۱-۱، ابتدا باید تابع حوزه لاپلاس را به کسرهای جزئی تفکیک نماییم.

❖ **یادآوری- تجزیه کسر به کسرهای جزئی:**

اگر درجه صورت کسری از مخرج آن کوچکتر باشد؛ برای تجزیه آن کسر به کسرهای جزئی بصورت زیر عمل می کنیم:

۱- اگر کسر $F(s)$ دارای عامل ساده (مرتبه اول) $(s+p_i)$ باشد، برای محاسبه ضریب این کسر در تجزیه به کسرهای جزئی بدین صورت عمل می کنیم:

$$A_i = \lim_{s \to -p_i} (s+p_i)F(s)$$

۲- اگر کسر $F(s)$ دارای عامل مکرر از مرتبه k از $(s+p_i)$ باشد، تابع به k کسر از این عامل تجزیه می‌گردد که توان عامل $(s+p_i)$ در مخرج کسرهای تجزیه شده j $(j=1,2,...,k)$نامیده می شود. برای محاسبه ضریب هر کسر با توان j در مخرج از این عامل بدین صورت عمل می کنیم:

$$A_j = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{s \to -p_i} \frac{d^{k-j}}{ds^{k-j}}\left((s+p_i)^k F(s)\right)$$

اگر درجه صورت کسری از مخرج آن بزرگتر یا حتی مساوی باشد؛ برای تجزیه آن کسر به کسرهای جزئی ابتدا صورت را به مخرج تقسیم نموده و سپس از روش فوق برای کسر باقیمانده استفاده می کنیم.

◂ مثال ۱-۴

عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

حل:

ابتدا کسر را به کسرهای جزئی تجزیه می کنیم:

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -2} (s+2)F(s) = \lim_{s \to -2} \frac{s+3}{s+1} = -1$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \to -1} \frac{s+3}{s+2} = 2$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1}\right\} \overset{T.1.1.6}{=} \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)u(t)$$

۲) $F(s) = \dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}$

حل:

درجه صورت از مخرج بیشتر است بنابراین ابتدا صورت را به مخرج تقسیم می کنیم:

$$
\begin{array}{l|l}
s^3+5s^2+9s+7 & s^2+3s+2 \\
-\left(s^3+3s^s+2s\right) & s+2 \\
\hline
2s^2+7s+7 & \\
-\ \left(2s^2+6s+4\right) & \\
\hline
s+4 &
\end{array}
$$

$$\rightarrow F(s)=s+2+\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$L^{-1}\left\{s+2+\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{s+2+\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+1}\right\}=\frac{d}{dt}\delta(t)+\delta(t)+\left(-e^{-2t}+2e^{-t}\right)u(t)$$

$$\boxed{L^{-1}\left\{s^k\right\}=\frac{d^k}{dt^k}\delta(t)}$$

۳) $F(s)=\dfrac{s^2+2}{(s+3)^3(s-2)}$

حل:

در این کسر یک ریشه مرتبه ۳ داریم، بنابراین برای این یک ریشه سه کسر متفاوت تولید می شود:

$$F(s)=\frac{s^2+2}{(s+1)^3(s-2)}=\underbrace{\frac{A_{11}}{(s+1)}}_{j=1}+\underbrace{\frac{A_{12}}{(s+1)^2}}_{j=2}+\underbrace{\frac{A_{13}}{(s+1)^3}}_{j=3}+\frac{A_2}{(s-2)}$$

$$A_{11}=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to-1}\frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}}\left((s+1)^3F(s)\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^2+2}{(s-2)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s(s-2)-(s^2+2)}{(s-2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2-4s-2}{(s-2)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\left(\frac{(2s-4)(s-2)-2(s-2)(s^2-4s-2)}{(s-2)^4}\right)=\frac{2}{9}$$

$$A_{12}=\frac{1}{(3-2)!}\lim_{s\to-1}\frac{d^{3-2}}{ds^{3-2}}\left((s+1)^3F(s)\right)=\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+2}{(s-2)}\right)=\lim_{s\to-1}\left(\frac{s^2-4s-2}{(s-2)^2}\right)=\frac{1}{3}$$

$$A_{13}=\frac{1}{(3-3)!}\lim_{s\to-1}\frac{d^{3-3}}{ds^{3-3}}\left((s+1)^3F(s)\right)=\lim_{s\to-1}\frac{s^2+2}{(s-2)}=-1$$

$$A_2=\lim_{s\to2}\left((s-2)F(s)\right)=\lim_{s\to2}\frac{s^2+2}{(s+1)^3}=\frac{2}{9}$$

$$\rightarrow F(s)=\frac{s^2+2}{(s+1)^3(s-2)}=\frac{2}{9(s+1)}+\frac{1}{3(s+1)^2}+\frac{-1}{(s+1)^3}+\frac{2}{9(s-2)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{9(s+1)}+\frac{1}{3(s+1)^2}+\frac{-1}{(s+1)^3}+\frac{2}{9(s-2)}\right\}=\left(\frac{2}{9}e^{2t}+\frac{2}{9}e^{-t}+\frac{1}{3}te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}\right)u(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-1\times2!}{2!(s+1)^3}\right\}=\frac{-1}{2}t^2e^{-t}$$

۱-۴- حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس:

اکنون که تبدیل لاپلاس و عکس آن را فرا گرفتیم، به حل معادلات دیفرانسیلی با استفاده از تبدیل لاپلاس می پردازیم.
برای حل معادلات دیفرانسیلی از طریق لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل، تبدیل لاپلاس می گیریم. با مرتب سازی معادله و محاسبه لاپلاس تابع مجهول، از طریق عکس تبدیل لاپلاس، تابع زمانی معادل را محاسبه می کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

◄ مثال ۱-۵

معادلات دیفرانسیلی زیر را حل نمایید:

۱) $$\begin{aligned} &2y''+7y'+3y=0 \\ &y(0)=3 \\ &y'(0)=0 \end{aligned}$$

حل:

$$L\{2y''+7y'+3y\}=L\{0\} \quad \to 2L\{y''\}+7L\{y'\}+3L\{y\}=0$$

$$\to 2\left(s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{3}-\underbrace{y'(0)}_{0}\right)+7\left(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{3}\right)+3Y(s)=0$$

$$\to Y(s)\left(2s^2+7s+3\right)=6s+21$$

$$\to Y(s)=\frac{6s+21}{2s^2+7s+3}=\frac{6s+21}{2(s+3)(s+0.5)}=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s+0.5)}$$

$$A=\lim_{s\to-3}\left((s+3)Y(s)\right)=\lim_{s\to-3}\frac{6s+21}{2(s+0.5)}=-0.6$$

$$B=\lim_{s\to-0.5}\left((s+0.5)Y(s)\right)=\lim_{s\to-0.5}\frac{6s+21}{2(s+3)}=3.6$$

$$Y(s)=\frac{-0.6}{(s+3)}+\frac{3.6}{(s+0.5)}\to y(t)=\left(-0.6e^{-3t}+3.6e^{-0.5t}\right)u(t)$$

۲) $$\begin{aligned} &2y'+2y=\delta(t) \\ &y(0)=0 \end{aligned}$$

حل:

$$L\{y'+2y\}=L\{\delta(t)\} \quad \to L\{y'\}+2L\{y\}=1$$

$$\to \left(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{0}\right)+2Y(s)=1\to Y(s)(s+2)=1$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+2)} \rightarrow y(t)=e^{-2t}u(t)$$

۳) $y''+2y'+5y=3\delta(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

حل:

$$L\{y''+2y'+5y\}=L\{3\delta(t)\} \quad \rightarrow L\{y''\}+2L\{y'\}+5L\{y\}=3$$

$$\rightarrow \left(s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}\right)+2\left(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{0}\right)+5Y(s)=3$$

$$\rightarrow Y(s)\left(s^2+2s+5\right)=3$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{3}{s^2+2s+5}=\frac{3\times\frac{2}{2}}{(s+1)^2+2^2}$$

$$y(t)=\frac{3}{2}\left(e^{-t}\sin(2t)\right)u(t)$$

بخش دوم :

مدلسازی ریاضی سیستمهای دینامیکی

بخش دوم: مدلسازی ریاضی سیستمهای دینامیکی

۲-۱- مقدمه:

مدل ریاضی سیستم دینامیکی یک معادله ریاضیست که رفتار دینامیکی سیستم را دقیقاً یا حداقل به خوبی نمایش می‌دهد. مدل ریاضی یک سیستم یکتا نبوده و آن را می توان به روش های مختلف نمایش داد.

شکل ۲-۱ : یک سیستم با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$

رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم ها را، اعم از سیستم مکانیکی، الکترونیکی، حرارتی، اقتصادی یا حتی زیست محیطی را می‌توان بر حسب معادلات دیفرانسیلی توصیف نمود. این معادلات را می توان با استفاده از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم، مثلاً قوانین نیوتن برای سیستم های مکانیکی و قوانین کیرشف برای سیستمهای الکتریکی بدست آورد.

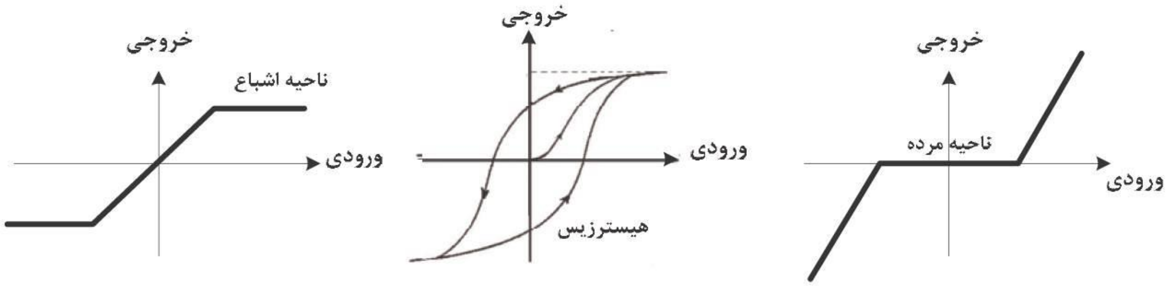
❖ **نکته:** یافتن یک مدل ریاضی مناسب، مهمترین بخش تحلیل یک سیستم می باشد.

پیش از بررسی روش های مدل سازی سیستم های حقیقی، ابتدا با چند تعریف آشنا می شویم.

۲-۲- تعاریف مهم:

۱- **سیستم های خطی و غیرخطی:** سیستمی خطی است که خاصیت جمع آثار در مورد آن صادق باشد، یعنی پاسخ ناشی از اعمال همزمان چندین ورودی (تحریک)، برابر جمع پاسخ های ناشی از تک تک این ورودیها باشد. از نظر ریاضی، این مشخصه سیستم را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \to y_n(t) \end{cases} \to \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) \to \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t) \qquad ۲-۱$$



شکل ۲-۲: انواع مشخصه ورودی- خروجی سیستم های غیرخطی

۲- **سیستم تغییرناپذیر با زمان:** از نظر مفهومی، سیستم تغییر ناپذیر با زمان است اگر رفتار و مشخصه های سیستم در طی زمان ثابت باشند. از نظر ریاضی، این مشخصه سیستم را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$x(t) \to y(t) \longrightarrow x(t-t_0) \to y(t-t_0) \qquad ۲-۲$$

۳- **سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان:** سیستمی که دو خصوصیت خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان را داشته باشد، سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان[1] (LTI) خوانده می شود.

۴- **سیستم حافظه دار – سیستم بدون حافظه:** سیستمی را بدون حافظه گویند اگر خروجی آن به ازای هر مقدار از متغیر مستقل در یک زمان مفروض، فقط به ورودی در همان زمان بستگی داشته باشد. سیستمی که این خاصیت را نداشته باشد، سیستم حافظه دار گویند. مفهوم حافظه در یک سیستم، منتاظر با وجود مکانیزمی در سیستم است که اطلاعاتی را درباره مقادیر ورودی در زمان هایی بجز لحظه جاری، نگهداشته یا ذخیره می کند.

۵- **سیستم عِلّی:** سیستمی را علی گویند اگر خروجی در لحظه فقط به مقادیر ورودی در لحظه کنونی و گذشته بستگی داشته باشد. چنین سیستمی را اغلب غیرپیشگو گویند زیرا سیستم مقادیر آینده را پیش بینی نمی کند.

۶- **سیستم پایدار:** اگر خروجی (پاسخ) یک سیستم به یک ورودی کراندار (یعنی مقدار ورودی بدون حد افزایش نیابد) کراندار باشد،سیستم را پایدار می نامند. به بیان غیر رسمی، سیستم پایدار سیستمی است که در آن ورودی های کوچک به خروجی هایی منجر می شوند که همگرا باشند.

۲-۳- مدل ریاضی یک سیستم:

رابطه ریاضی بین ورودی – خروجی یک سیستم خطی را به چهار روش می توان توصیف نمود. این روش ها عبارتند از:

۱- معادلات دیفرانسیلی
۲- تابع تبدیل
۳- معادلات حالت
۴- دیاگرام بلوکی

هر یک از این روش های توصیفی قابل تبدیل به روشهای دیگر می باشند. در بخش اول جزوه، معادلات دیفرانسیل معرفی گردید. بنابراین اکنون به بررسی سه روش دیگر می پردازیم:

۲-۳-۱- تابع تبدیل:

تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، طبق تعریف نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن می باشد. بنابراین، اگر تابع تبدیل یک سیستم را با $G(s)$ نمایش دهیم داریم:

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}} = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad ۳-۲$$

که در آن $y(t)$ و $x(t)$ به ترتیب خروجی و ورودی سیستم می باشند.

[1] Linear Time-Invariant System (LTI System)

❖ **نکات مهم:**

۱- تابع تبدیل به مشخصات سیستم بستگی دارد و مستقل از ورودی و خروجی است.

۲- تابع تبدیل هیچ اطلاعاتی در خصوص ساختار فیزیکی سیستم بدست نمی دهد. در واقع توابع تبدیل چندین سیستم مختلف و کاملاً متفاوت می تواند یکسان باشد.

۳- اگر تابع تبدیل یک سیستم مشخص باشد، پاسخ سیستم به هر ورودی را می توان محاسبه نمود.

۴- تابع تبدیل سیستم های عملی (که خطی نیستند) بطور تجربی و بررسی ورودی – خروجی های گوناگون بدست می آید.

۵- اگر ورودی سیستم سیگنال ضربه باشد، داریم:

$$x(t)=\delta(t)\rightarrow X(s)=1\rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{\underbrace{X(s)}_{1}}=Y(s)$$

بنابراین تابع تبدیل، همان لاپلاس خروجی سیستم به ورودی ضربه (لاپلاس پاسخ ضربه سیستم) است.

۶- برای محاسبه تابع تبدیل یک سیستم، شرایط اولیه همواره صفر در نظر گرفته می شوند.

اکنون به بررسی ارتباط بین تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم می پردازیم. معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم شکل ۲-۱ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^mx(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی رابطه فوق و در نظر گرفتن نکته شماره ۶ داریم:

$$a_ns^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+\ldots+a_1sY(s)+a_0Y(s)=b_ms^mX(s)+b_{m-1}s^{m-1}X(s)+\ldots+b_1sX(s)+b_0X(s)$$

$$\rightarrow Y(s)\left(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}++\ldots+a_1s+a_0\right)=X(s)\left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0\right)$$

$$\rightarrow G(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}++\ldots+a_1s+a_0}$$

برای رسیدن از تابع تبدیل به معادله دیفرانسیل کافیست عکس روش فوق را بکار بگیریم.

◀ **مثال ۲-۱**

تابع تبدیل سیستم های توصیف شده زیر را بدست آورید:

۱) $5y'''+4y''+y=2x'+14x$

حل:

$$L\{5y'''+4y''+y\}=L\{2x'+14x\}$$

$$\rightarrow 5s^3Y(s)+4s^2Y(s)+Y(s)=2s\,X(s)+14X(s)$$

$$\rightarrow Y(s)\left(5s^3+4s^2+1\right)=(2s+14)X(s)$$

$$\rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2s+14}{5s^3+4s^2+1}$$

۲) $\begin{cases} x(t)=\delta(t) \\ y(t)=\left(e^{-3t}-e^{-t}\right)u(t) \end{cases}$

حل:

$$\begin{cases} x(t)=\delta(t) \\ y(t)=\left(e^{-3t}-e^{-t}\right)u(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(s)=1 \\ Y(s)=\left(\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{1}{s+1}\right)=\dfrac{s+1-s-3}{(s+3)(s+1)}=\dfrac{-2}{s^2+4s+3} \end{cases}$$

$$\rightarrow G(s)=\frac{\dfrac{-2}{s^2+4s+3}}{1}=\frac{-2}{s^2+4s+3}$$

۳) $y''+2y'+5y=3x(t)$

حل:

$$L\{y''+2y'+5y\}=L\{3x(t)\}$$

$$\rightarrow s^2Y(s)+2sY(s)+5Y(s)=3X(s)$$

$$\rightarrow Y(s)\left(s^2+2s+5\right)=3X(s)$$

$$\rightarrow G(s)=\frac{3}{s^2+2s+5}$$

◀ مثال ۲-۲

الف) با توجه به تابع تبدیل داده شده، پاسخ سیستم را به ورودی $x(t)$ محاسبه نمایید.

۱) $\begin{cases} G(s)=\dfrac{10}{s^2+5s+6} \\ x(t)=\left(1-e^{-5t}\right)u(t) \end{cases}$

حل:

$$\begin{cases} G(s)=\dfrac{10}{s^2+5s+6}=\dfrac{10}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{Y(s)}{X(s)} \\ X(s)=L\left\{\left(1-e^{-5t}\right)u(t)\right\}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+5}=\dfrac{s+5-s}{s(s+5)}=\dfrac{5}{s(s+5)} \end{cases} \rightarrow Y(s)=\frac{10}{(s+2)(s+3)}\times\frac{5}{s(s+5)}$$

$$Y(s)=\frac{50}{s(s+2)(s+3)(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s+3)}+\frac{D}{(s+5)}$$

$$A=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{50}{\cancel{s}(s+2)(s+3)(s+5)}=\frac{5}{3}$$

$$B=\lim_{s\to -2}(s+2)Y(s)=\lim_{s\to -2}\cancel{(s+2)}\,\frac{50}{s\cancel{(s+2)}(s+3)(s+5)}=\frac{-25}{3}$$

$$C=\lim_{s\to -3}(s+3)Y(s)=\lim_{s\to -3}\cancel{(s+3)}\frac{50}{s(s+2)\cancel{(s+3)}(s+5)}=\frac{25}{3}$$

$$D=\lim_{s\to -5}(s+5)Y(s)=\lim_{s\to -5}\cancel{(s+5)}\frac{50}{s(s+2)(s+3)\cancel{(s+5)}}=\frac{-5}{3}$$

$$\to Y(s)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{5}{(s+2)}+\frac{5}{(s+3)}-\frac{1}{(s+5)}\right)\to y(t)=\frac{5}{3}\left(1-5e^{-2t}+5e^{-3t}-e^{-5t}\right)u(t)$$

ب) پاسخ پله سیستم توصیف شده بصورت زیر را محاسبه نمایید:

۲) $G(s)=\dfrac{s(s+3)}{s^2+4s+20}$

حل:

$$x(t)=u(t)\to X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{\cancel{s}(s+3)}{s^2+4s+20}\frac{1}{\cancel{s}}=\frac{(s+3)}{s^2+4s+20}$$

$$s^2+4s+20=0\to\Delta=4^2-80<0$$

در محاسبه عکس تبدیل لاپلاس هر زمان ریشه های مخرج موهومی بودند، فرم کلی پاسخ ردیف های ۹ و ۱۰ جدول ۱-۱ می باشد.

برای محاسبه مقادیر مجهول، معیار را مخرج کسرها قرار می دهیم:

$$s^2+4s+20\equiv(s+a)^2+\omega_0^2=s^2+2as+a^2+\omega_0^2$$

$$\to 2a=4\to a=2\to a^2+\omega_0^2=4+\omega_0^2=20\to\omega_0^2=16\to\omega_0=4$$

$$Y(s)=\frac{(s+2+1)}{(s+2)^2+4^2}=\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4^2}+\frac{1\times\frac{4}{4}}{(s+2)^2+4^2}=\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{(s+2)^2+4^2}\right)$$

$$\to y(t)=\left(e^{-2t}\cos(4t)+\frac{1}{4}e^{-2t}\sin(4t)\right)u(t)=e^{-2t}\left(\cos(4t)+\frac{1}{4}\sin(4t)\right)u(t)$$

ج) پاسخ ضربه سیستم توصیف شده بصورت زیر را محاسبه نمایید:

۳) $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$

حل:

$$x(t)=\delta(t)\to X(s)=1$$

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}$$

$$A=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}(s+1)}=1$$

$$B=\lim_{s\to -1}(s+1)Y(s)=\lim_{s\to -1}\cancel{(s+1)}\frac{1}{s\cancel{(s+1)}}=-1$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\rightarrow y(t)=\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

۲-۳-۲- معادلات حالت:

مدلسازی در فضای حالت که نظریه نوین کنترل نام گرفته است، به منظور برآوردن قیدهای سخت تر بر عملکرد سیستم های کنترل، افزایش پیچیدگی و سهولت دسترسی به کامپیوترها بکار گرفته شده است. در ابتدا لازم است با چند تعریف اصلی در این خصوص آشنا شویم:

۱- **مفهوم حالت:** منظور از حالت[1] یک سیستم دینامیکی، کوچکترین مجموعه متغیرهایی است که اگر در لحظه t_0 معلوم باشند، به همراه ورودی در $t \geq t_0$ می توان رفتار سیستم در $t \geq t_0$ را بطور کامل تحلیل نمود.

۲- **متغیر حالت:** متغیرهای حالت[2] یک سیستم دینامیکی، متغیرهایی هستند که کوچکترین مجموعه تعیین کننده حالت سیستم را تشکیل می دهند.

اگر برای توصیف کامل رفتار دینامیکی حداقل n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ لازم باشد، در صورتیکه این n متغیر با مشخص شدن ورودی رفتار سیستم را در هر لحظه $t \geq t_0$ تخمین بزنند، متغیرهای حالت سیستم را تشکیل می دهند. متغیرهای حالت یک سیستم لزوماً نباید قابل مشاهده/ اندازه گیری باشند. حتی این متغیرها می توانند فیزیکی نباشند. (که این یکی از مزیت های مدلسازی حالت می باشد.)

۳- **بردار حالت:** اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای حالت یک سیستم باشند، بردار $\vec{x}_{n\times 1}$ تعریف شده بصورت زیر را بردار حالت گوییم:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

۴- **فضای حالت:** فضای n بعدی که محورهای مختصات آن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشند، فضای حالت نامیده می شود. هر حالت x_i, $i=1,2,\ldots,n$ بیانگر یک نقطه در فضای حالت می باشد.

اکنون با در دست داشتن این تعاریف، به معرفی فرم مدلسازی معادلات حالت می پردازیم. در تحلیل فضای حالت، با سه نوع متغیر که در مدل کردن رفتار دینامیکی سیستم دخالت دارند، سر و کار داریم:

- متغیرهای ورودی
- متغیرهای خروجی
- متغیرهای حالت

برای یک سیستم خطی با n متغیر حالت و m ورودی، فرم کلی این معادلات بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_{n\times 1}(t)=A_{n\times n}(t)\,\vec{x}_{n\times 1}(t)+B_{n\times m}(t)\,\vec{w}_{m\times 1}(t) \\ y_{1\times 1}(t)=C_{1\times n}(t)\,\vec{x}_{n\times 1}(t)+D_{1\times m}(t)\,\vec{w}_{m\times 1}(t) \end{cases} \qquad ۴-۲$$

[1] State
[2] State Variables

که در آن $\vec{w}_{m\times1}(t)$ بردار متغیرهای ورودی، $y_{1\times1}(t)$ متغیر خروجی و $\vec{x}_{n\times1}(t)$ بردار متغیرهای حالت می باشند. ماتریس های $A_{n\times n}(t), B_{n\times m}(t), C_{1\times n}(t), D_{1\times m}(t)$ ماتریسهایی هستند که به مشخصات سیستم وابسته می باشند. اگر سیستم LTI باشد، ماتریسهای ضرایب ثابت بوده و فرم کلی بصورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}_{n\times1}(t)=A_{n\times n}\,\vec{x}_{n\times1}(t)+B_{n\times m}\,\vec{w}_{m\times1}(t)\\ y_{1\times1}(t)=C_{1\times n}\,\vec{x}_{n\times1}(t)+D_{1\times m}\,\vec{w}_{m\times1}(t)\end{cases} \qquad ۵-۲$$

اکنون به بررسی ارتباط بین تابع تبدیل، معادله دیفرانسیل و معادلات حالت می پردازیم. بار دیگر سیستم شکل ۲-۱ را با معادله دیفرانسیل و تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^n w(t)}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}w(t)}{dt^{n-1}}+\dots+b_{n-1}\frac{dw(t)}{dt}+b_n w(t)$$

$$G(s)=\frac{b_0 s^n+b_{n-2}s^{n-2}+\dots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}++\dots+a_{n-1}s+a_n}$$

- اگر در معادله دیفرانسیل مشتقات ورودی ظاهر نشود، برای تبدیل معادله دیفرانسیل به معادلات حالت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=w(t)$$

$$x_1(t)=y(t)$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t)=\dot{x}_{n-2}(t)=\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}}$$

$$x_n(t)=\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}$$

$$\to \dot{x}_n(t)=\frac{d^n y(t)}{dt^n}=\left(-a_1\underbrace{\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}}_{x_n(t)}-\dots-a_{n-1}\underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{x_2(t)}-a_n\underbrace{y(t)}_{x_1(t)}+w(t)\right)$$

$$=-a_1x_n(t)-\dots-a_{n-1}x_2(t)-a_nx_1(t)+w(t)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}w\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+0\times w\end{cases}$$

- اگر در معادله دیفرانسیل مشتقات ورودی تا مرتبه m ام ظاهر شود، برای تبدیل معادله دیفرانسیل به معادلات حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^n w(t)}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}w(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+b_{n-1}\frac{dw(t)}{dt}+b_n w(t)$$

$$\begin{aligned}
&x_1(t)=y(t)-\beta_0 w(t)\\
&x_2(t)=\dot{x}_1(t)-\beta_1 w(t)\\
&\vdots\\
&x_n(t)=\dot{x}_{n-1}(t)-\beta_{n-1}w(t)\\
&\rightarrow \dot{x}_n(t)=-a_1x_n(t)-\ldots-a_{n-1}x_2(t)-a_nx_1(t)+\beta_n w(t)
\end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{cases}\beta_0=b_0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n=b_n-a_1\beta_{n-1}-\ldots-a_{n-1}\beta_1-a_n\beta_0\end{cases}$$

می باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}w\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\beta_0 w\end{cases}$$

با داشتن تابع تبدیل، ابتدا از تابع تبدیل به معادله دیفرانسیلی معادل می رسیم و سپس از معادله دیفرانسیل با استفاده از روش های فوق معادلات حالت را بدست می آوریم. اما با داشتن معادلات حالت نیز می توان به تابع تبدیل رسید. با اعمال تبدیل لاپلاس به هر دو معادله ۲-۵ داریم:

$$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=A\vec{x}(t)+B\vec{w}(t)\\ y(t)=C\vec{x}(t)+D\vec{w}(t)\end{cases}\xrightarrow{L\{\,\}}\begin{cases}sX(s)=AX(s)+BW(s)\\ Y(s)=CX(s)+DW(s)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow X(s)(sI-A)=BW(s)\rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}BW(s)\\
&\rightarrow Y(s)=C\left((sI-A)^{-1}BW(s)\right)+DW(s)\\
&\qquad\quad=\left(C(sI-A)^{-1}B+D\right)W(s)\\
&\rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D
\end{aligned}$$

◂ مثال ۲-۳

الف) برای سیستم توصیف شده توسط معادلات حالت زیر:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

الف) تابع تبدیل

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$\rightarrow (sI - A)^{-1} = \left(s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+4)-1} \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+6s+7} \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{s^2+6s+7} \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+6s+7} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2+6s+7} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s+10 \\ 2s+6 \end{pmatrix} \right) = \frac{4s+16}{s^2+6s+7}$$

ب) پاسخ پله

$$G(s) = \frac{4s+16}{s^2+6s+7} \rightarrow Y(s) = \frac{4s+16}{s(s^2+6s+7)} = \frac{2.28}{s} - \frac{2.15}{s+1.58} - \frac{0.13}{s+4.41}$$

$$\rightarrow y(t) = \left(2.28 - 2.15e^{-1.58t} - 0.13e^{-4.41t}\right) u(t)$$

ج) پاسخ به ورودی $e^{-4t}u(t)$ را محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{4s+16}{s^2+6s+7} \\ R(s) = \dfrac{1}{s+4} \end{cases} \rightarrow Y(s) = \frac{4s+16}{(s+4)(s^2+6s+7)} = \frac{4\cancel{(s+4)}}{\cancel{(s+4)}(s^2+6s+7)} = \frac{1.4}{s+1.58} - \frac{1.4}{s+4.41}$$

$$\rightarrow y(t) = 1.4\left(e^{-1.58t} - e^{-4.41t}\right) u(t)$$

◂ مثال ۲-۴

معادلات حالت سیستم های توصیف شده زیر را بدست آورید:

$$۱)\ G(s) = \frac{10}{s^2+5s+6}$$

حل:

ابتدا از تابع تبدیل معادله دیفرانسیلی معادل را بدست می آوریم:

$$G(s)=\frac{10}{s^2+5s+6}=\frac{Y(s)}{W(s)}$$

$$\rightarrow\left(s^2+5s+6\right)Y(s)=s^2\,Y(s)+5s\,Y(s)+6\,Y(s)=10\,W(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}\{\}}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6\,y(t)=10\,w(t)$$

اکنون معادلات حالت را بدست می آوریم:

$$\begin{cases}x_1(t)=y(t)\\ x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}\\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=-5\underbrace{\dfrac{dy(t)}{dt}}_{x_2(t)}-6\underbrace{y(t)}_{x_1(t)}+10\,w(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-6&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix}w\\ y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+0w\end{cases}$$

۲) $G(s)=\dfrac{12s+59}{s^2+6s+8}$

حل:

ابتدا از تابع تبدیل معادله دیفرانسیلی معادل را بدست می آوریم:

$$G(s)=\frac{\overbrace{12}^{b_1}s+\overbrace{59}^{b_2}}{s^2+\underbrace{6}_{a_1}s+\underbrace{8}_{a_2}}=\frac{Y(s)}{W(s)}$$

$$\rightarrow\left(s^2+6s+8\right)Y(s)=s^2\,Y(s)+6s\,Y(s)+59\,Y(s)=(12s+59)W(s)=12s\;W(s)+59W(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}\{\}}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=12\frac{dw(t)}{dt}+59\,w(t)$$

اکنون معادلات حالت را بدست می آوریم:

$$n=2\rightarrow\begin{cases}\beta_0=b_0=0\\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0=12\\ \beta_2=59-6\times12=-13\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1(t)=y(t)\\ x_2(t)=\dot{x}_1(t)-12w(t)\\ \dot{x}_2(t)=-8x_1(t)-6x_2(t)-w(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-8&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12\\-13\end{bmatrix}w\\ y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+0\times w\end{cases}$$

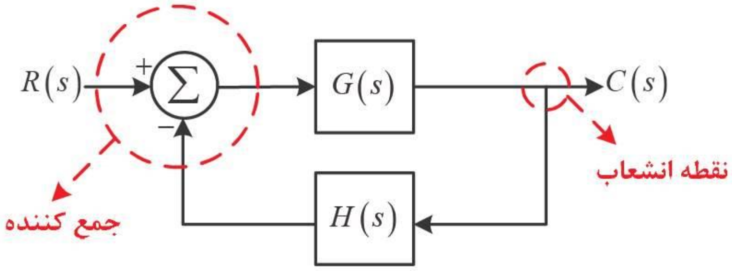
۲-۳-۴- دیاگرام بلوکی:

در مهندسی کنترل برای نشان دادن عملی که هر عنصر انجام می دهد از نموداری موسوم به نمودار بلوکی استفاده می کنیم:

❖ نمودار بلوکی:

نمودار بلوکی یک سیستم نمایشی ترسیمی برای نمایش کاری است که هر عنصر انجام می دهد و مسیرهای عبور سیگنالهاست. نمودار بلوکی بر خلاف نمایش ریاضی محض؛ این مزیت را دارد که عبور سیگنال در سیستم واقعی را بسیار محسوس تر نشان می دهد.

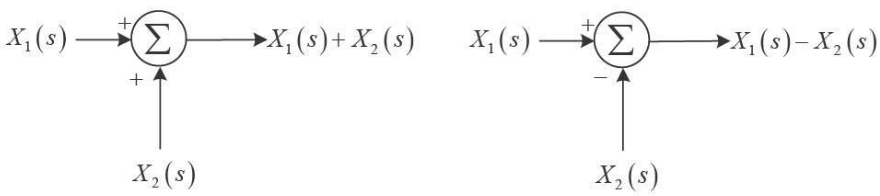
توضیحات بیشتر از طریق مثال بیان می گردد، به نمودار بلوکی زیر توجه کنید:



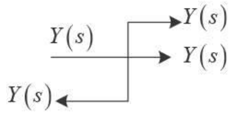
شکل ۲-۳: یک نمودار بلوکی نمونه

در نمودار بلوکی شکل ۲-۳ داریم:

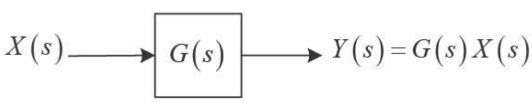
- $R(s)$ [1] سیگنال ورودی و $C(s)$ [2] سیگنال خروجی است.
- جمع کننده نشان داده شده بسته به علامت روی هر پیکان سیگنال ها را جمع یا تفریق می کند.



- نقطه انشعاب به این معناست که ورودی به نقطه انشعاب و هر تعداد خروجی از این نقطه یک سیگنال را نشان می‌دهد:



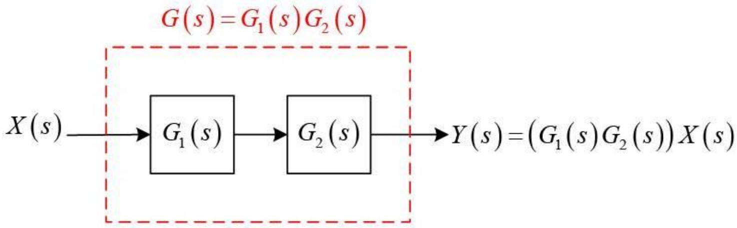
- خروجی هر بلوک برابر ضرب ورودی آن در تابع تبدیل آن بلوک می باشد:



- اگر یک سیگنال به دو بلوک پشت سر هم وارد شود، خروجی آن بصورت زیر خواهد بود:

---

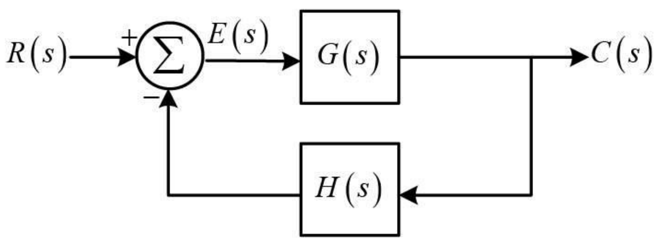
[1] Referenced Signal
[2] Controlled signal



- $G(s)$ را که تابع تبدیل مسیر مستقیم است، تابع تبدیل مسیر پیش خورد[1] و $H(s)$ را که تابع تبدیل مسیر معکوس است (از خروجی به ورودی) تابع تبدیل مسیر پس خورد[2] (فیدبک) نامند.
- اگر شاخه فیدبک در شکل ۲-۳ وجود نداشته باشد، سیستم را حلقه باز[3] و اگر وجود داشته باشد (مطابق شکل) سیستم را حلقه بسته[4] گویند.
- اگر علامت شاخه فیدبک در شکل ۲-۳ منفی باشد، فیدبک را منفی و اگر مثبت باشد، فیدبک را مثبت گویند.
- اگر $H(s)=1$ باشد، فیدبک را **واحد** می نامند.

سیستم حلقه بسته و محاسبه تابع تبدیل آن از روی نمودار بلوکی:

سیستمی را که نمودار بلوکی آن شامل یک حلقه بسته[5] باشد، را سیستم حلقه بسته می نامند. بار دیگر به شکل ۲-۳ توجه کنید:



شکل ۲-۴: یک سیستم حلقه بسته

اکنون به محاسبه تابع تبدیل سیستم حلقه بسته می پردازیم. می دانیم که تابع تبدیل یک سیستم نسبت لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی می باشد، بنابراین:

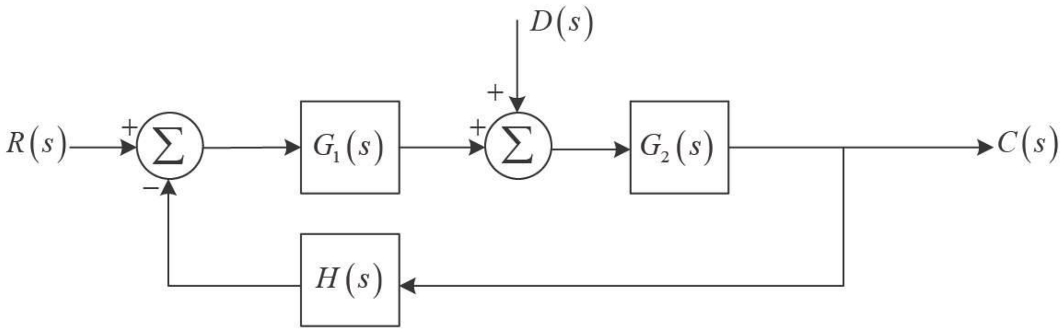
$$C(s)=E(s)G(s)$$
$$E(s)=R(s)-\big(C(s)H(s)\big)\rightarrow C(s)=G(s)R(s)-G(s)C(s)H(s)$$
$$\rightarrow C(s)\big(1+G(s)H(s)\big)=G(s)R(s)$$
$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad ۲-۶$$

[1] Feed Forward
[2] Feedback
[3] Open Loop System
[4] Close Loop System
[5] مسیری که ابتدا و انتهای آن یکی باشد و از هر بلوک تنها یکبار عبور کنیم.

شاخه فیدبک برای مقایسه ورودی سیستم و خروجی آن بکار می رود. $E(s)$ که اختلاف ورودی و خروجی است، سیگنال خطا نامیده می شود.

سیستم حلقه بسته دارای اغتشاش:

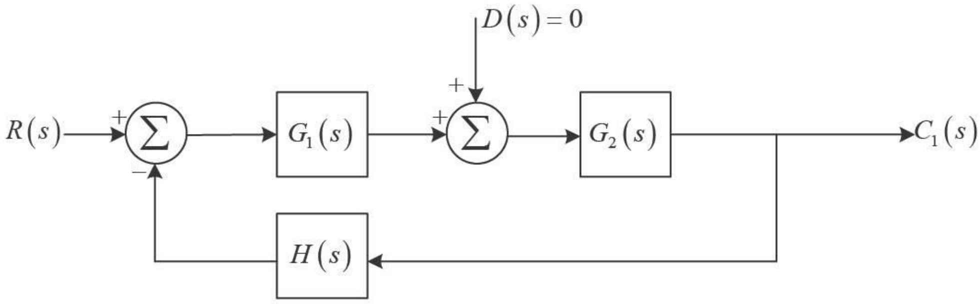
هر سیگنال ناخواسته که به یک سیستم وارد می شود، سیگنال اغتشاش[1] نامیده می شود. این سیگنال نیز در نمودار بلوکی سیستم مدلسازی می شود:



شکل ۲-۵: یک سیستم حلقه بسته با اغتشاش مدل شده

از آنجایی که تمام سیستم هایی که در این درس با آن سر و کار داریم، خطی هستند، برای محاسبه تابع تبدیل چنین سیستمی از قانون جمع آثار استفاده می کنیم:

۱- محاسبه تابع تبدیل تنها به ورودی $R(s)$:



با استفاده از ۲-۶ داریم:

$$T_1(s)=\frac{C_1(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\rightarrow C_1(s)=\left(\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\right)R(s)$$

۲- محاسبه تابع تبدیل تنها به ورودی $D(s)$:

توجه کنید که مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی مسیر $G_2(s)$ و مسیر معکوس آن $G_1(s)H(s)$ می باشد، بنابراین با استفاده از ۲-۶ داریم:

[1] Disturbance Signal

$$T_2(s)=\frac{C_2(s)}{D(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\rightarrow C_2(s)=\left(\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\right)D(s)$$

بنابراین، خروجی کل برابر است با:

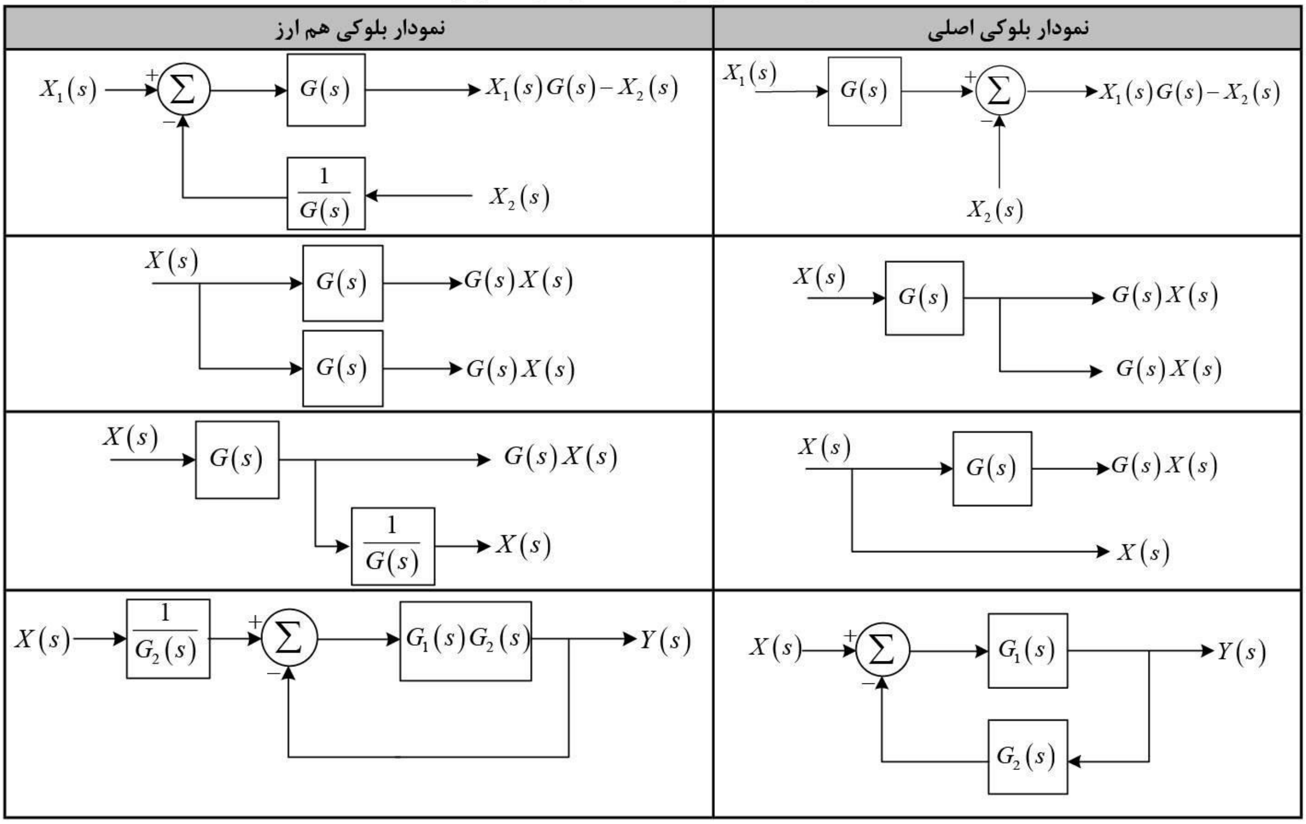
$$C(s)=C_1(s)+C_2(s)=\left(\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\right)R(s)+\left(\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\right)D(s)$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)R(s)+G_2(s)D(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

ساده سازی دیاگرام های بلوکی:

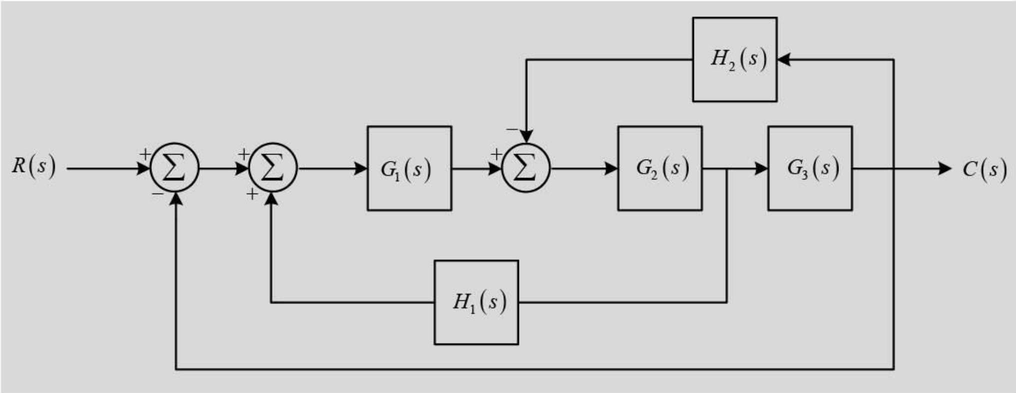
برای محاسبه تابع تبدیل یک سیستم از روی نمودار بلوکی آن لازم است، روش های ساده سازی نمودارهای بلوکی را فراگیریم. با ساده سازی نمودارهای بلوکی و تبدیل آن به شکل ۲-۴ می توان با استفاده از فرمول ۲-۶ تابع تبدیل را محاسبه نمود.

جدول ۲-۱: روش های ساده سازی نمودار بلوکی



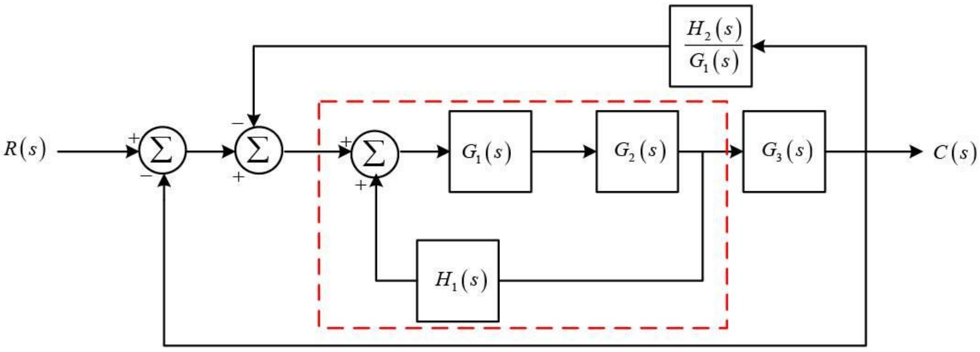
مثال ۲-۵

تابع تبدیل پیاده سازی شده توسط نمودار بلوکی زیر را محاسبه نمایید:



حل:

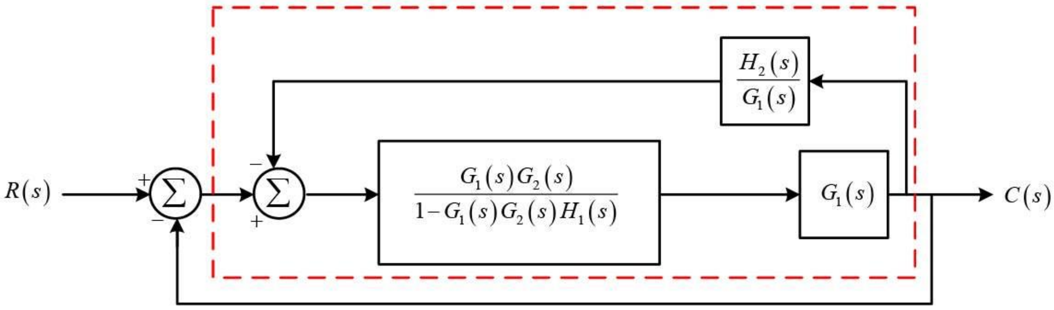
ابتدا نمودار بلوکی را ساده می کنیم. در آغاز جمع کننده میانی را به قبل از بلوک $G_1(s)$ منتقل می کنیم:



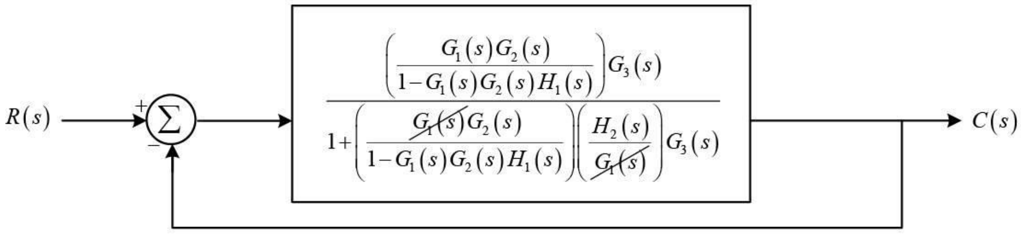
ناحیه هاشور خورده، یک زیر سیستم حلقه بسته با **فیدبک مثبت** است. تابع تبدیل این زیر سیستم طبق ۲-۶ عبارتست از:

$$\frac{G_1(s)G_2(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

اکنون داریم:



بار دیگر میبینیم که ناحیه هاشور خورده، یک زیر سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی است. تابع تبدیل این زیر سیستم طبق ۲-۶ عبارتست از:



با ساده سازی تابع تبدیل مسیر مستقیم داریم:

$$\frac{\left(\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\right)G_3(s)}{1+\left(\dfrac{G_2(s)G_3(s)H_2(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\right)}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}$$

که این سیستم نهایی یک سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی است:

$$T(s)=\frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}}{1+\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}}$$
$$=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

استفاده از جدول ۲-۱ گرچه ما را به سمت تابع تبدیل نهایی سوق می دهد اما حتی برای سیستمهای ساده نیز روشی بسیار وقت گیر است. به منظور تحلیل بهتر و محاسبه سریعتر تابع تبدیل از روی نمودارهای بلوکی، روشی به نام **روش میسون** ارائه شد است.

قاعده میسون برای ساده سازی دیاگرام های بلوکی:

برای استفاده از قاعده میسون، ابتدا نمودارهای بلوکی را بصورت گراف رسم می نماییم، سپس تابع تبدیل سیستم را از روی روابط گراف بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$M(s)=\frac{\sum M_j\Delta_j}{\Delta} \qquad ۷-۲$$

Δ ۸-۲

$$\Delta=1-\left(\text{مجموع بهره تک تک حلقه ها}\right)+\left(\text{مجموع ضرب هر دو حلقه غیر مشترک}\right)-\left(\text{مجموع ضرب هر سه حلقه غیر مشترک}\right)+\cdots \qquad ۹-۲$$

که در آن:

$M(s)$: تابع تبدیل سیستم

j: تعداد مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی

M_j: بهره مسیر مستقیم شماره j ام

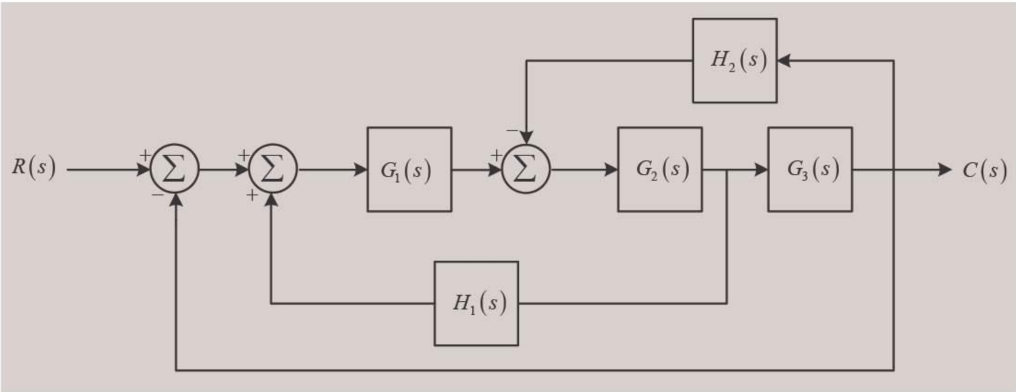
می باشد.

- منظور از حلقه غیر مشترک، حلقه هایی هستند که هیچ گره یا مسیر مشترکی نداشته باشند.
- منظور از حذف شاخه، حذف شاخه به همراه گره های دو سر آن می باشد.
- اگر یک گره حذف گردد، تمام شاخه های متصل به آن حذف می گردند.

با چند مثال این روش را بررسی می کنیم:

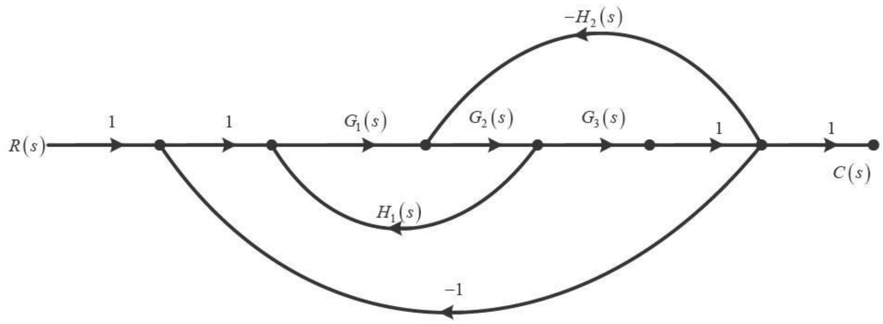
◄ مثال ۲-۶

تابع تبدیل پیاده سازی شده توسط نمودار بلوکی زیر را محاسبه نمایید:



حل:

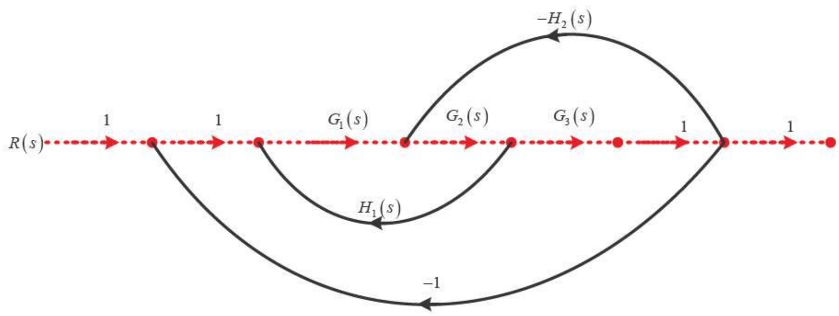
ابتدا نمودار بلوکی را به فرم گراف تبدیل می کنیم:



در این گراف تنها ۱ مسیر مستقیم از ورودی به خروجی وجود دارد، بنابراین:

$$j=1 \to M_1 = 1\times 1\times G_1(s)\times G_2(s)\times G_3(s)\times 1\times 1$$

برای حذف مسیر $j=1$ تمام شاخه های این مسیر را حذف می کنیم:



توجه کنید که با حذف مسیر نقطه چین فوق تمام شاخه های متصل به آن نیز حذف می گردند (به دلیل حذف گره ها) بنابراین

داریم:

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

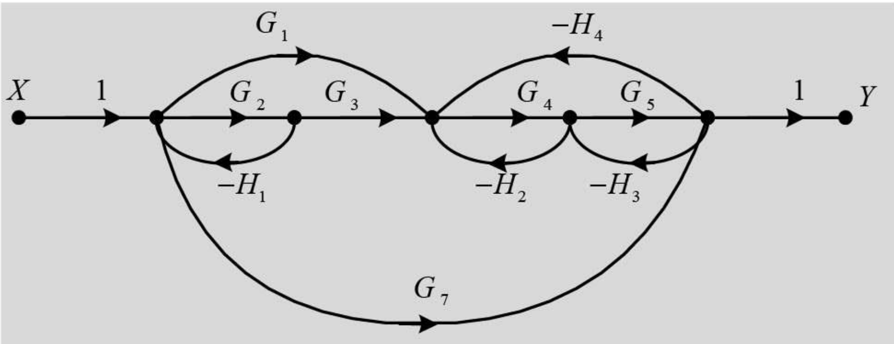
$$\Delta = 1 - \left(G_1(s)G_2(s)H_1(s) - G_2(s)G_3(s)H_2(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)\right) + (0) - ....$$

در نتیجه:

$$M(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

مثال ۲-۷

تابع تبدیل پیاده سازی شده توسط نمودار بلوکی زیر را محاسبه نمایید:



حل:

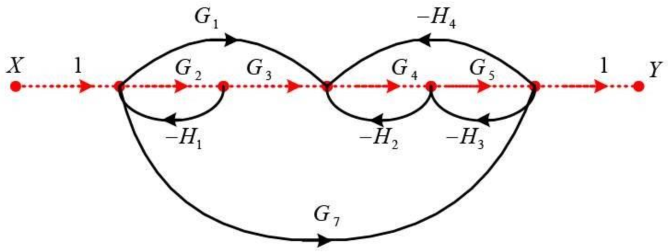
در این گراف ۳ مسیر مستقیم از ورودی به خروجی وجود دارد، بنابراین:

$$j = 1 \rightarrow M_1 = 1 \times G_2 \times G_3 \times G_4 \times G_5 \times 1$$

$$j = 2 \rightarrow M_2 = 1 \times G_1 \times G_4 \times G_5 \times 1$$

$$j = 3 \rightarrow M_3 = 1 \times G_7 \times 1$$

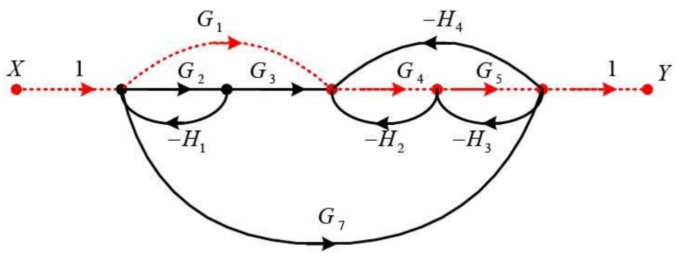
برای حذف مسیر $j = 1$ تمام شاخه های این مسیر را حذف می کنیم:



توجه کنید که با حذف مسیر نقطه چین فوق تمام شاخه های متصل به آن نیز حذف می گردند (به دلیل حذف گره ها) بنابراین داریم:

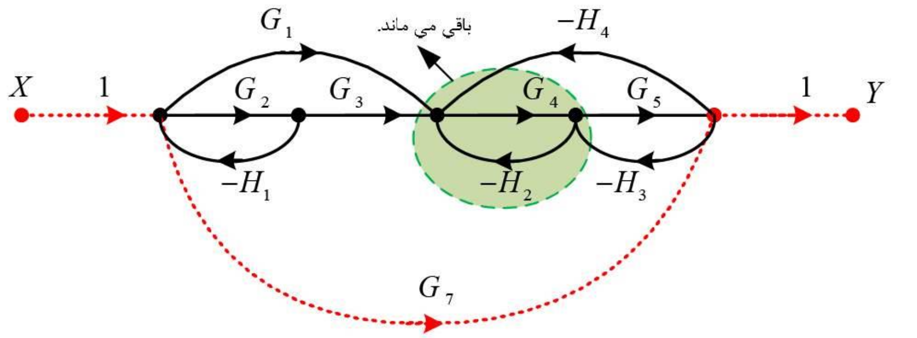
$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

برای حذف مسیر $j = 2$ تمام شاخه های این مسیر را حذف می کنیم:



$$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$$

برای حذف مسیر $j = 3$ تمام شاخه های این مسیر را حذف می کنیم:



$$\Delta_3 = 1 - \left(-G_4H_2\right) = 1 + G_4H_2$$

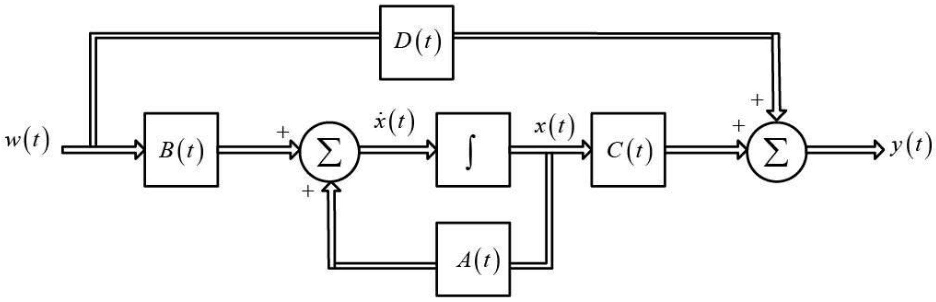
در آخر داریم:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - \left(-G_2H_1 - G_4H_2 - G_5H_3 - G_4G_5H_4\right) \\ &\quad + \left(\left(-G_2H_1\right)\left(-G_4H_2\right) + \left(-G_2H_1\right)\left(-G_5H_3\right) + \left(-G_2H_1\right)\left(-G_4G_5H_4\right)\right) = \\ &= 1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_5H_3 + G_4G_5H_4 + G_2H_1G_4H_2 + G_2H_1G_5H_3 + G_2H_1G_4G_5H_4\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$M(s) = \frac{G_2G_3G_4G_5 + G_1G_4G_5 + G_7\left(1 + G_4H_2\right)}{1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_5H_3 + G_4G_5H_4 + G_2H_1G_4H_2 + G_2H_1G_5H_3 + G_2H_1G_4G_5H_4}$$

اکنون به ارتباط بین معادلات دیفرانسیل، معادلات حالت و دیاگرام بلوکی می پردازیم، برای زوج معادلات حالت ۲-۴ فرم دیاگرام بلوکی بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۲-۶: دیاگرام بلوکی سیستم معادلات ۲-۴

برای تبدیل معادله دیفرانسیل به فرم دیاگرام بلوکی بار دیگر دو حالت در نظر می گیریم:

- اگر در معادله دیفرانسیل مشتقات ورودی ظاهر نشود، برای تبدیل معادلات دیفرانسیل به دیاگرام بلوکی بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = w(t)$$
$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

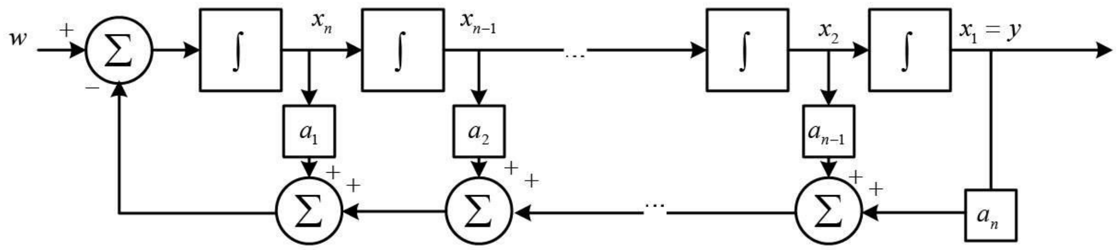
$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t)=\dot{x}_{n-2}(t)=\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}}$$

$$x_n(t)=\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}$$

$$\rightarrow \dot{x}_n(t)=\frac{d^n y(t)}{dt^n}=\left(-a_1\underbrace{\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}}_{x_n(t)}-\ldots-a_{n-1}\underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{x_2(t)}-a_n\underbrace{y(t)}_{x_1(t)}+w(t)\right)$$

$$=-a_1x_n(t)-\ldots-a_{n-1}x_2(t)-a_nx_1(t)+w(t)$$



شکل ۲-۷: دیاگرام بلوکی معادل معادله دیفرانسیل سیستمی که مشتقات خروجی در آن ظاهر نمی شود.

- اگر در معادله دیفرانسیل مشتقات ورودی تا مرتبه m ام ظاهر شود، برای تبدیل معادله دیفرانسیل به دیاگرام بلوکی به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_ny(t)=b_0\frac{d^n w(t)}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}w(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+b_{n-1}\frac{dw(t)}{dt}+b_nw(t)$$

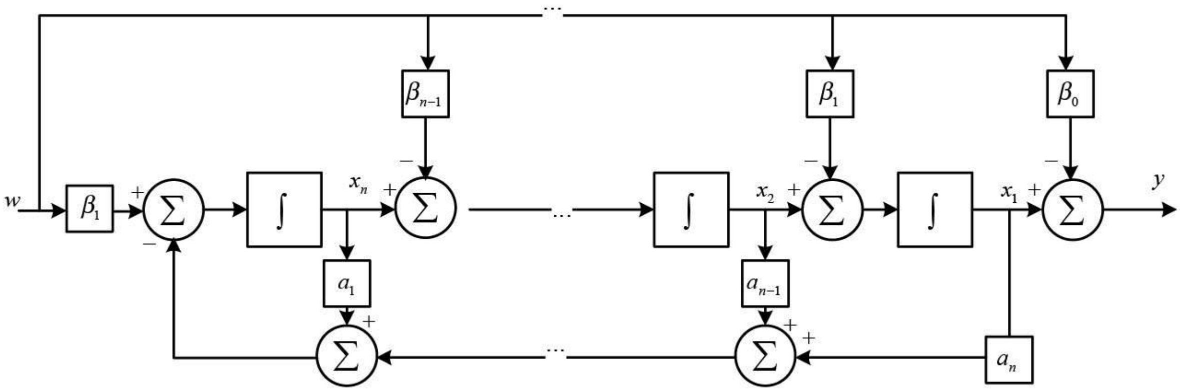
$$x_1(t)=y(t)-\beta_0w(t)$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)-\beta_1w(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t)=\dot{x}_{n-1}(t)-\beta_{n-1}w(t)$$

$$\rightarrow \dot{x}_n(t)=-a_1x_n(t)-\ldots-a_{n-1}x_2(t)-a_nx_1(t)+\beta_nw(t)$$



شکل ۲-۸: دیاگرام بلوکی معادل معادله دیفرانسیل سیستمی که مشتقات خروجی در آن ظاهر می شود.

بجای بلوک $\int$ می توان از بلوک $\frac{1}{s}$ نیز استفاده نمود. اکنون دو سیستم موجود در مثال ۲-۳ را به دیاگرام بلوکی تبدیل می‌کنیم:

◀ مثال ۲-۸

دیاگرام بلوکی سیستم های توصیف شده زیر را بدست آورید:

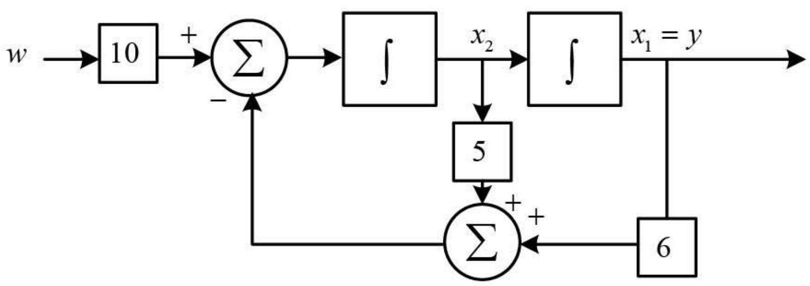
۱) $G(s)=\dfrac{10}{s^2+5s+6}$

حل:

با توجه به مثال ۲-۳ داریم:

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=-5\underbrace{\dfrac{dy(t)}{dt}}_{x_2(t)}-6\underbrace{y(t)}_{x_1(t)}+10w(t) \end{cases}$$

اکنون با توجه به شکل ۲-۷ داریم:



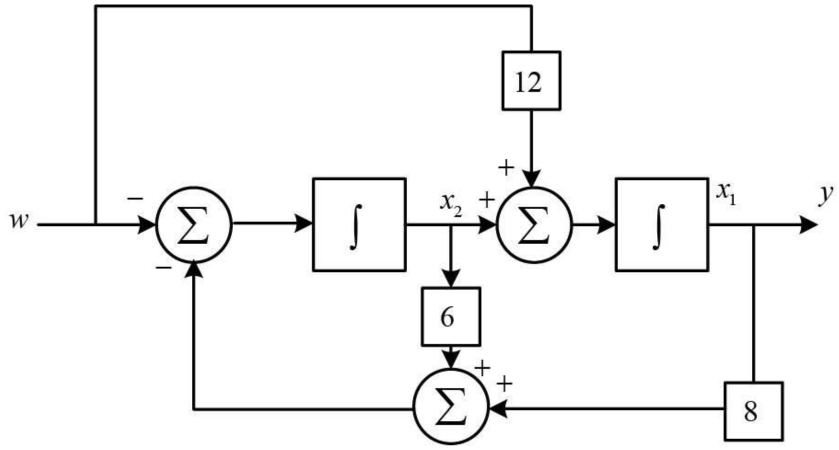
۲) $G(s)=\dfrac{12s+59}{s^2+6s+8}$

حل:

با توجه به مثال ۲-۳ داریم:

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{x}_1(t)-12w(t) \\ \dot{x}_2(t)=-8x_1(t)-6x_2(t)-w(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12\\ -1\end{bmatrix}w \\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+0\times w \end{cases}$$

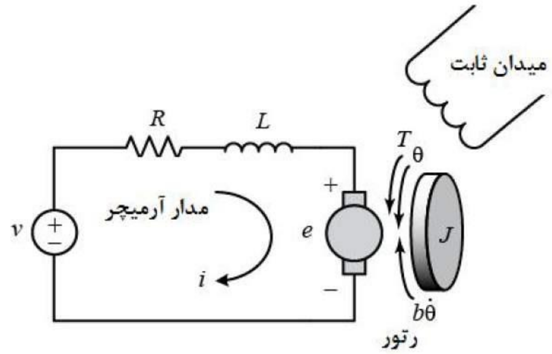
اکنون با توجه به شکل ۲-۸ داریم:



۲-۴- مدلسازی چند سیستم فیزیکی نمونه:

۲-۴-۱- مدل سازی سرو موتور:

در این بخش به مدل سازی یک سرو موتور[1] ساده که یکی از محرک های اصلی در کنترل می باشد، می پردازیم:



شکل ۲-۹: سروموتور

همانطور که از شکل فوق که مدل الکتریکی یک سروموتور را نشان می دهد، پیداست با اعمال یک ولتاژ $v(t)$ در ورودی، گشتاور $T(t)$ در رتور بوجود می آید. اگر $\theta(t)$ که زاویه شفت رتور می باشد (موقعیت شفت) را بعنوان خروجی تعریف کنیم، داریم:

$$\begin{cases} T(t)=Ki \\ e=K\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+b\dfrac{d\theta}{dt}=Ki \\ L\dfrac{di}{dt}+Ri=v-K\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی روابط فوق داریم:

$$\begin{cases} s(Js+b)\theta(s)=KI(s) \\ (Ls+R)I(s)=V(s)-Ks\theta(s) \end{cases} \rightarrow s(Js+b)\theta(s)=K\frac{V(s)-Ks\theta(s)}{(Ls+R)}$$

[1] Servo Motor

$$\rightarrow \theta(s)\left(s(Js+b)+\frac{K^2 s}{(Ls+R)}\right)=K\frac{V(s)}{(Ls+R)}$$

$$\rightarrow \theta(s)\left(\frac{s(Js+b)(Ls+R)+K^2 s}{\cancel{(Ls+R)}}\right)=K\frac{V(s)}{\cancel{(Ls+R)}}$$

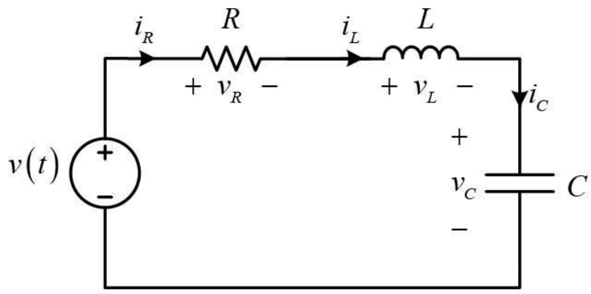
$$\rightarrow \frac{\theta(s)}{V(s)}=\frac{K}{s(Js+b)(Ls+R)+K^2 s}=\frac{K}{s\left((Js+b)(Ls+R)+K^2\right)}$$

اگر سرعت موتور بعنوان خروجی مد نظر باشد، (سرعت، مشتق $\theta(t)$ می باشد) داریم:

$$\frac{s\theta(s)}{V(s)}=\frac{V_\theta(s)}{V(s)}=\frac{K}{\left((Js+b)(Ls+R)+K^2\right)}$$

۲-۴-۲- مدل سازی مدار RLC:

مدار RLC سری زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۲-۱۰: مدار RLC سری

اگر با در نظر گرفتن $v(t)$ بعنوان ورودی و $v_C(t)$ بعنوان خروجی، معادلات مداری را بنویسیم، داریم:

$$i_R=i_L=i_C$$

$$-v(t)+v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=0\rightarrow v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=v(t)$$

$$\begin{cases} v_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}=L\dfrac{di_C(t)}{dt}=L\dfrac{d^2v_C(t)}{dt^2} \\ v_R(t)=Ri_R=Ri_C=RC\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}\rightarrow RC\frac{dv_C(t)}{dt}+L\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+v_C(t)=v(t)$$

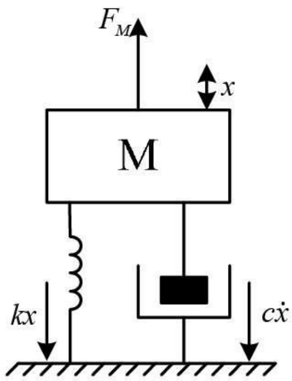
با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی روابط فوق داریم:

$$RCsV_C(s)+Ls^2V_C(s)+V_C(s)=V(s)\rightarrow V_C(s)\left(Ls^2+RCs+1\right)=V(s)$$

$$\rightarrow \frac{V_C(s)}{V(s)}=\frac{1}{Ls^2+RCs+1}$$

۲-۴-۲- مدل سازی یک مسئله مکانیکی:

اکنون یک سیستم مکانیکی ساده که سیستم جرم و فنر و دمپر می باشد را در نظر بگیرید. اگر ورودی را نیروی F_M و خروجی را جابجایی در اثر نیروی وارده یعنی x در نظر بگیریم، با استفاده از قانون نیوتن داریم:



۲-۱۱: یک سیستم جرم و فنر و دمپر

$$\sum F = Ma$$

که در آن $\sum F$ مجموع نیروهای وارده بر جسم M و a شتاب آن می باشد. بنابراین با توجه به شکل ۲-۱۱ داریم:

$$\begin{cases} F_M - kx - c\dot{x} = Ma \\ a = \ddot{x} \end{cases} \rightarrow F_M - kx - c\dot{x} = M\ddot{x}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر روی روابط فوق داریم:

$$F_M(s) - kX(s) - csX(s) = Ms^2X(s) \rightarrow F_M(s) = X(s)\left(Ms^2 + ks + C\right)$$

$$\rightarrow \frac{X(s)}{F_M(s)} = \frac{1}{Ms^2 + ks + C}$$

بخش سوم:

بررسی پاسخ گذرا

بخش سوم: تحلیل پاسخ گذرا

۳-۱- مقدمه:

در فصل قبل دیدیم که اولین قدم در تحلیل یک سیستم کنترلی، بدست آوردن مدل ریاضی سیستم می باشد. با دانستن مدل ریاضی یک سیستم، روشهای متعددی برای تحلیل آن سیستم وجود خواهد داشت. یک روش مناسب برای تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی مقایسه عملکرد سیستم های مختلف می باشد که این امر با مقایسه پاسخ این سیستم ها به یک ورودی تست واحد می باشد.

سیگنال تست، باید رابطه ریاضی ساده ای با زمان داشته باشد. معمولاً یکی از سیگنالهای زمانی پله، ضربه، شیب، شتاب و سینوسی بعنوان سیگنال تست مورد استفاده قرار می گیرد.

۳-۲- تعاریف مهم:

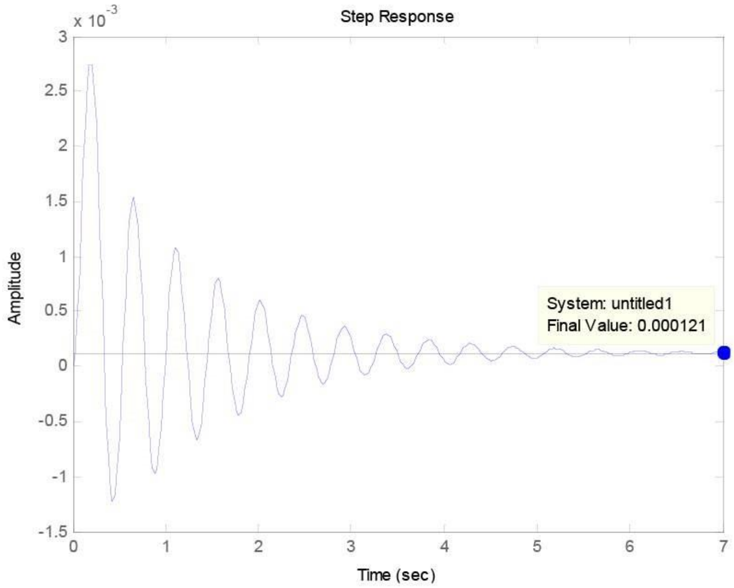
۱- **پاسخ گذرا** ($y_t(t)$): منظور از پاسخ گذرا[1]، پاسخ سیستم به شرایط اولیه می باشد. پاسخ گذرای یک سیستم با میل $t \to \infty$ حذف خواهد شد.

۲- **پاسخ ماندگار**($y_{ss}(\infty)$): پاسخ سیستم پس از گذشت زمان طولانی یعنی در $t \to \infty$ را پاسخ ماندگار[2] (حالت دائمی)گویند. توجه کنید که پاسخ ماندگار می تواند شامل جملاتی دارای t باشد.

۳- **پاسخ کامل:** پاسخ زمانی هر سیستم مجموع دو بخش گذرا و ماندگار می باشد.

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(\infty)$$

به شکل زیر توجه کنید:



شکل ۳-۱: نمونه از پاسخ یک سیستم

[1] Transient Response
[2] Steady State Response

با توجه به شکل ۳-۱ می بینیم که مقدار نهایی این پاسخ برابر 0.000121 می باشد، اما پاسخ کلی تا رسیدن به این مقدار تغییرات زیادی داشته است. این تغییرات که شکل نوسانی دارند با گذشت زمان میرا شده و پاسخ به سمت مقدار نهایی میل کرده است. در این شکل بخش نوسانی شکل را پاسخ گذرا و مقدار نهایی را پاسخ ماندگار می نامیم.

۴- **قطب تابع تبدیل:** ریشه های مخرج تابع تبدیل را قطب های تابع تبدیل گویند.

۵- **صفر تابع تبدیل:** ریشه های صورت تابع تبدیل را صفرهای تابع تبدیل گویند.

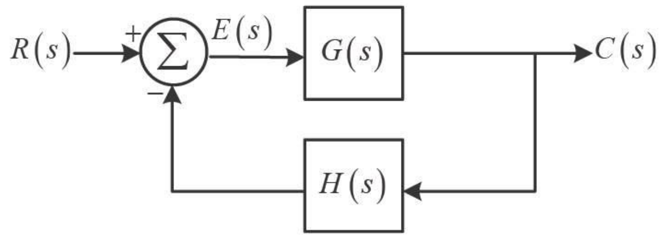
۶- **پایداری مطلق:** مهمترین خصوصیت یک سیستم کنترلی، پایداری مطلق آن می باشد. منظور از پایداری مطلق، پایدار یا ناپایدار بودن سیستم می باشد. یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان را سیستم پایدار[1] گوییم اگر بدون حضور هر گونه ورودی و با تغییر شرایط اولیه سیستم ، خروجی سیستم تغییر نکند. بطور غیر رسمی، سیستمی را ناپایدار[2] گوییم که خروجی بدون تغییر در ورودی به زمان تغییر کند و این تغییرات هیچگاه میرا نشود. اگر پاسخ سیستم به ورودی ثابت نوسانی بود و این نوسانات میرا نشود سیستم را پایدار مرزی گویند.

۷- **پایداری نسبی:** درجه و مقدار پایداری یک سیستم را که به موقعیت قطب های تابع تبدیل در صفحه لاپلاس بستگی دارد را پایداری نسبی گوییم.

❖ **نکته:**

یکی از روشهای مناسب برای تبدیل یک سیستم ناپایدار به سیستم پایدار استفاده از شاخه فیدبک می باشد.

۸- **خطای حالت ماندگار**($e_{ss}(\infty)$): اگر سیستمی دارای فیدبک باشد، نقش فیدبک مقایسه ورودی و خروجی می باشد.



شکل ۳-۲: یک سیستم حلقه بسته

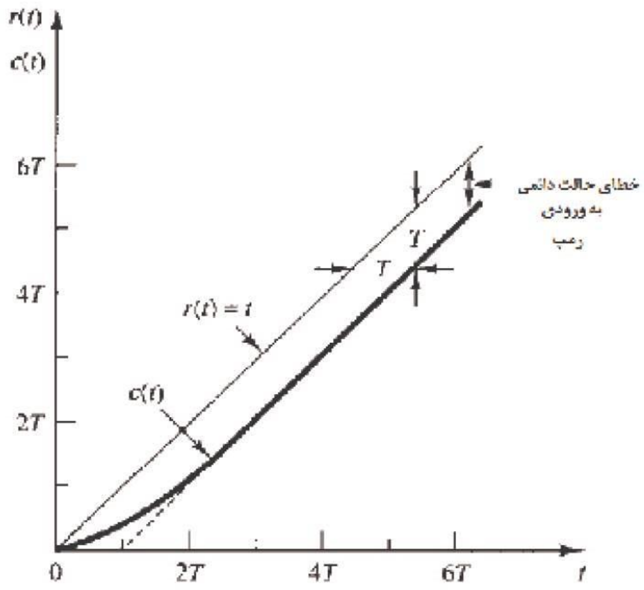
خروجی سیگنال جمع کننده در سیستم دارای فیدبک را خطا $E(s)$ می نامند. اگر سیستم پایدار باشد، خطای حالت دائمی، اختلاف بین خروجی سیستم و خروجی مطلوب طراح خواهد بود:

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,E(s) \qquad ۱-۳$$

❖ **نکته:**

- خطای حالت دائمی برای سیستم پایدار تعریف می گردد.
- خطای حالت دائمی می تواند ناشی از فرسودگی یا خطای خطی سازی سیستم باشد.

[1] Stable System
[2] Unstable

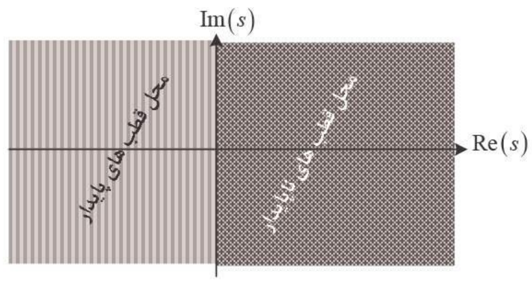


شکل ۳-۳: خطای حالت دائمی به ورودی رمپ

قبل از آنکه به تحلیلی پاسخ گذرای سیستم بپردازیم، ابتدا با مفاهیم پایداری و خطای حالت دائمی بیشتر آشنا می شویم.

۳-۳- بررسی پایداری سیستم های کنترلی:

مهمترین مدل ریاضی در درس کنترل خطی تابع تبدیل سیستم می باشد. با در دست داشتن تابع تبدیل سیستم، زمانی سیستم را پایدار گوییم که تمام قطب های تابع تبدیل در سمت چپ صفحه موهومی واقع شوند.



شکل ۳-۴: محل قطب های پایدار و ناپایدار در صفحه s

❖ **نکات:**

- اگر تابع تبدیل سیستمی دارای قطبی در نیم صفحه راست باشد، پاسخ ضربه سیستم دارای عبارتی بصورت $e^{kt}, k>0$ خواهد بود. این عبارت با افزایش زمان به سمت بینهایت رشد می کند و سیستم ناپایدار خواهد بود.
- اگر تابع تبدیل سیستمی دارای قطبی روی محور موهومی باشد، این سیستم پایدار مرزی خواهد بود.
- هر چه فاصله قطب ها از محور موهومی بیشتر باشد، پایداری نسبی سیستم بیشتر خواهد بود.

بطور کلی روشهای متعددی برای بررسی پایداری یک سیستم وجود دارد، که در این جزوه تنها به بررسی چهار روش اصلی آن می پردازیم:

۱- معیار پایداری روث – هورویتز[1]
۲- روش مکان ریشه ها
۳- روش منحنی نایکوئیست
۴- روش منحنی های بودی

در این بخش تنها به بررسی معیار پایداری روث – هورویتز می پردازیم و سه روش باقیمانده در بخش های آتی مطرح خواهند شد.

۳-۳-۱- معیار پایداری روث – هورویتز:

یکی از روش های تعیین پایداری سیستم، محاسبه ریشه های مخرج تابع تبدیل سیستم می باشد. مخرج تابع تبدیل یک سیستم را معادله مشخصه[2] سیستم ($\Delta(s)$) گویند. فرم کلی معادله مشخصه یک سیستم را

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

در نظر بگیرید. این معادله یک معادله مرتبه n می باشد. درصورتیکه مرتبه معادله بیش از ۳ باشد، محاسبه ریشه های معادله مشخصه و بررسی پایداری آن به روش های دستی امکان پذیر نمی باشد. معیار پایداری روث – هورویتز یک معیار مناسب برای تعیین تعداد ریشه های ناپایدار می باشد.

برای استفاده از این معیار ابتدا جدولی مطابق جدول زیر تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & \underbrace{\dfrac{a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3}{a_1}}_{A_1} & \underbrace{\dfrac{a_1 \times a_4 - a_0 \times a_5}{a_1}}_{A_2} & \underbrace{\dfrac{a_1 \times a_6 - a_0 \times a_7}{a_1}}_{A3} & \cdots \\
s^{n-3} & \dfrac{A_1 \times a_3 - A_2 \times a_1}{A_1} & \dfrac{A_1 \times a_5 - A_3 \times a_1}{A_1} & \dfrac{A_1 \times a_5 - A_3 \times a_1}{A_1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

توجه کنید که این معیار خود ریشه های معادله را محاسبه نمی کند بلکه تنها تعداد ریشه های ناپایدار را مشخص می کند.

❖ **نکات:**

- یک شرط لازم برای اینکه تمام ریشه های معادله پایدار باشند اینست که تمام ضرایب معادله هم علامت باشند.
- تعداد تغییر علامت ستون اول جدول روث – هورویتز برابر تعداد ریشه های ناپایدار سیستم می باشد.
- برای سادگی می توان اعداد یک سطر را به یک عدد مثبت تقسیم و یا در یک عدد مثبت ضرب نمود.

[1] Routh-Hurwitz Criterion
[2] Characteristic Equation

◂ مثال ۳-۱

تعداد ریشه های ناپایدار سیستم های زیر را بدست آورید:

۱) $\Delta(s)=3s^7+9s^6+6s^5+4s^4+7s^3+8s^2+2s+6=0$

حل:

ابتدا جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$
\begin{array}{ccccc}
s^7 & 3 & 6 & 7 & 2 \\
s^6 & 9 & 4 & 8 & 6 \\
s^5 & \underbrace{\dfrac{9\times6-3\times4}{9}}_{4.67} & \underbrace{\dfrac{9\times7-8\times3}{9}}_{4.33} & \underbrace{\dfrac{9\times2-6\times3}{9}}_{0} & 0 \\
s^4 & -4.34 & 8 & 6 & 0 \\
s^3 & 12.93 & 6.45 & 0 & 0 \\
s^2 & 10.165 & 6 & 0 & 0 \\
s & -1.18 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 6 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

همانطور که از جدول پیداست چهار تغییر علامت داریم. پس این سیستم چهار ریشه ناپایدار دارد.

۲) $\Delta(s)=2s^5+6s^4+3s^3+4s^2+3s+9=0$

حل:

ابتدا جدول روث را تشکیل می دهیم:

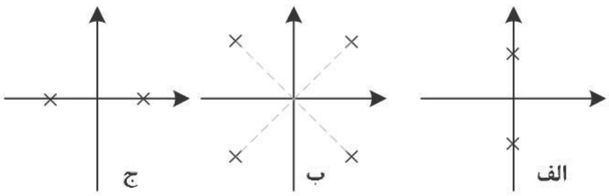
$$
\begin{array}{cccc}
s^5 & 2 & 3 & 3 \\
s^4 & 6 & 4 & 9 \\
s^3 & \underbrace{\dfrac{6\times3-4\times2}{6}}_{\frac{10}{6}} & \underbrace{\dfrac{6\times3-9\times2}{6}}_{0} & 0 \\
s^2 & 4 & 9 & 0 \\
s & -15 & 0 & 0 \\
1 & 9 & 0 & 0
\end{array}
$$

همانطور که از جدول پیداست دو تغییر علامت داریم. پس این سیستم دو ریشه ناپایدار دارد.

در محاسبه مقادیر جدول روث – هورویتز، موارد خاصی هم ممکن است بوجود آید، که این موارد را با ذکر مثال توضیح می دهیم:

۱- وجود یک سطر تمام صفر:

وجود یک سطر تمام صفر به معنای وجود ریشه های متقارن نسبت به مبدا است. به شکل های زیر توجه کنید:



شکل ۳-۵: حالت های مختلف ریشه های متقارن نسبت به مبدا

در هر سه حالت فوق با تشکیل جدول روث به یک سطر تمام صفر بر می خوریم، اما تنها در حالت الف ریشه ها در سمت راست صفحه (بخش ناپایدار) قرار ندارند. حالت الف را حالت پایدار مرزی می نامیم.

❖ **نکته:**

- اگر با وجود یک سطر تمام صفر در جدول روث – هورویتز، ستون اول تغییر علامت نداشته باشد، سیستم پایدار مرزی است.
- اگر بیش از یک سطر تمام صفر در جدول روث – هورویتز داشته باشیم، سیستم ناپایدار خواهد بود.

به مثال زیر توجه کنید:

◂ مثال ۳-۲

تعداد ریشه های ناپایدار سیستم های زیر را بدست آورید:

۱) $\Delta(s) = s^5 + 5s^4 - 3s^3 - 15s^2 + 2s + 10 = 0$

حل:

با توجه به تغییر علامت موجود در ضرایب معادله فوق، این سیستم قطعاً ناپایدار است. برای تشخیص تعداد ریشه های ناپایدار، ابتدا جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & -3 & 2 \\
s^4 & 5 & -15 & 10 \\
s^3 & \underbrace{\dfrac{5\times -3-(-15)\times 1}{5}}_{0} & \underbrace{\dfrac{5\times 2-10\times 1}{5}}_{0} & 0 \\
s^2 & & & \\
s & & & \\
1 & & &
\end{array}$$

اکنون در محاسبه ضرایب، در سطر سوم به یک سطر تمام صفر برخوردیم. برای محاسبه ادامه جدول، یک مرحله به عقب بر می‌گردیم و از معادله کمکی که از سطر قبل بدست می آید مشتق می گیریم:

$$s^4 \quad 5 \quad -15 \quad 10 \longrightarrow 5s^4 - 15s^2 + 10 = 0 \rightarrow \boxed{20}\, s^3 \boxed{-30}\, s = 0$$

معادله کمکی

اکنون بجای ضرایب صفر سطر سوم، ضرایب بدست آمده از مشتق معادله فوق را جایگزین می کنیم:

$$
\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & -3 & 2 \\
s^4 & 5 & -15 & 10 \\
s^3 & \cancel{20}^{\lfloor 2} & \cancel{-30}^{\lfloor -3} & 0 \\
s^2 & \cancel{-\dfrac{15}{2}}^{\lfloor -30} & 10^{\lfloor 20} & 0 \\
s & -\dfrac{5}{3} & 0 & 0 \\
1 & 20 & 0 & 0
\end{array}
$$

۲ تغییر علامت در ستون اول بیانگر دو ریشه ناپایدار می باشد. با محاسبه ریشه های این معادله به جواب های $-5, \pm 1.41, \pm 1$ می‌رسیم که به وضوح تقارن نسبت به مبدأ در آنها دیده می شود.

۲- وجود یک عنصر صفر در ستون اول:

اگر در ستون اول جدول روث – هورویتز، عدد صفر ظاهر شود، چون اعداد سطر بعدی همگی بر عنصر اول تقسیم می‌گردند، این موضوع محاسبه ضرایب بعدی را دچار مشکل می کند. برای برطرف کردن این موضوع سه روش وجود دارد:

- عدد صفر را با $\varepsilon > 0$ که عددی بسیار کوچک است جایگزین می کنیم و سپس در انتها ε را به سمت صفر میل می دهیم.
- در معادله مشخصه بجای s، $\dfrac{1}{s}$ قرار می دهیم. معادله بدست آمده دارای ریشه هایی برابر عکس ریشه های معادله مشخصه اصلی است، اما تعداد تغییر علامت هر دو معادله یکی است.
- معادله را در یک $(s+1)$ ضرب می کنیم. چون $(s+1)$ یک ریشه پایدار به معادله اضافه می کند، تغییر علامت معادله متفاوت نخواهد بود.

به مثال زیر توجه کنید:

◄ مثال ۳-۳

تعداد ریشه های ناپایدار سیستم های زیر را بدست آورید:

۱) $\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 = 0$

حل:

ابتدا جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$
\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
s^3 & \underbrace{\dfrac{2\times3-6\times1}{2}}_{0} & \underbrace{\dfrac{2\times5-3\times1}{2}}_{\cancel{\frac{7}{2}}^{\lfloor 7}} & 0 \\
s^2 & & & \\
s & & & \\
1 & & &
\end{array}
$$

اکنون در محاسبه ضرایب، در سطر سوم به یک عنصر اول صفر برخوردیم:

روش اول: عدد صفر را با $\varepsilon > 0$ که عددی بسیار کوچک است جایگزین می کنیم و سپس در انتها ε را به سمت صفر میل می‌دهیم:

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
s^3 & \varepsilon & 7 & 0 \\
s^2 & \underbrace{\dfrac{\varepsilon\times 6-7\times 2}{\cancel{\varepsilon}}}_{6\varepsilon-14\approx -14} & \underbrace{\dfrac{\varepsilon\times 3-0}{\cancel{\varepsilon}}}_{3\varepsilon} & \\
s & \underbrace{\dfrac{-14\times 7-3\varepsilon^2}{-14}}_{\approx 7} & 0 & 0 \\
1 & 3\varepsilon & &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
s^3 & \varepsilon & 7 & 0 \\
s^2 & -14 & 3\varepsilon & \\
s & 7 & 0 & 0 \\
1 & 3\varepsilon & &
\end{array}$$

۲ تغییر علامت در ستون اول بیانگر دو ریشه ناپایدار می باشد.

روش دوم: در معادله مشخصه بجای s، $\frac{1}{s}$ قرار می دهیم:

$$\Delta'(s)=\left(\frac{1}{s}\right)^5+2\left(\frac{1}{s}\right)^4+3\left(\frac{1}{s}\right)^3+6\left(\frac{1}{s}\right)^2+5\left(\frac{1}{s}\right)+3=3s^5+5s^4+6s^3+3s^2+2s+1=0$$

اکنون جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 3 & 6 & 2 \\
s^4 & 5 & 3 & 1 \\
s^3 & \dfrac{\cancel{21}}{\cancel{5}}\,3 & \dfrac{\cancel{7}}{\cancel{5}}\,1 & 0 \\
s^2 & \dfrac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\,4 & \cancel{1}\,3 & 0 \\
s & \dfrac{-5}{4} & 0 & 0 \\
1 & 3 & &
\end{array}$$

روش سوم بعنوان تمرین به دانشجویان واگذار می شود.

◄ مثال ۳-۴

به ازای چه مقداری از k سیستم زیر پایدار خواهد بود:

۱) $\Delta(s)=s^4+s^3+s^2+s+k=0$

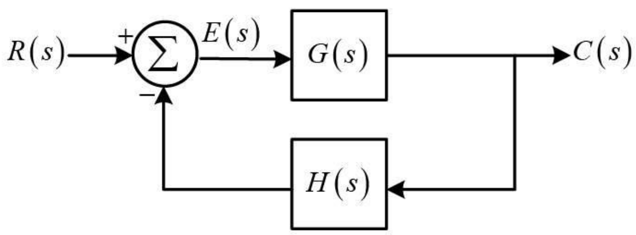
حل:

ابتدا جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 1 & k \\
s^3 & 1 & 1 & 0 \\
s^2 & \underbrace{\dfrac{1\times1-1\times1}{1}}_{\varepsilon} & k & 0 \\
s & \underbrace{\dfrac{\varepsilon\times1-k\times1}{\varepsilon}}_{1-\frac{k}{\varepsilon}} & 0 & 0 \\
1 & k & 0 & 0
\end{array}
\to \begin{cases} 1-\dfrac{k}{\varepsilon}>0 \to \dfrac{k}{\varepsilon}<1 \to k<\varepsilon \square 0 \\ k>0 \end{cases} \to \begin{cases} k<0 \\ k>0 \end{cases} \to \text{غیر ممکن}$$

۳-۴- محاسبه خطای حالت دائمی:

بار دیگر سیستم حلقه بسته شکل ۳-۲ را در نظر بگیرید:



شکل ۳-۶: سیستم حلقه بسته

اگر تابع تبدیل سیستم را به کلی ترین فرم ممکن بصورت زیر تعریف کنیم:

$$G(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}e^{-T_d s} \qquad ۳-۲$$

آنگاه N را که مرتبه تکرار قطب در مبدأ می باشد را نوع سیستم می نامند. همچنین بالاترین توان s در مخرج تابع تبدیل را مرتبه سیستم می نامند. اکنون به محاسبه خطای حالت دائمی[1] بر می گردیم:

$$\begin{cases} E(s)=R(s)-H(s)C(s) \\ C(s)=\dfrac{G(s)}{1+H(s)G(s)}R(s) \end{cases}$$

$$\to E(s)=R(s)-\frac{G(s)H(s)}{1+H(s)G(s)}R(s)=R(s)\left(1-\frac{H(s)G(s)}{1+G(s)H(s)}\right)$$

$$=R(s)\left(\frac{1+\cancel{H(s)G(s)-H(s)G(s)}}{1+G(s)}\right)=R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)$$

[1] Steady State Error

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\,R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right) \qquad ۳-۳$$

با دقت در فرمول ۳-۲ می بینیم که خطای حالت دائمی به ورودی بستگی دارد. بسته به نوع ورودی، خطای حالت دائمی را محاسبه می کنیم:

$$R(s)=\frac{1}{s}\to e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\to e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\left(\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\right)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{sG(s)H(s)}\right)$$

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\to e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\left(\frac{1}{s^{\cancel{3}}}\right)\left(\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s^2G(s)H(s)}\right)$$

خلاصه ای از روابط فوق در جدول ۳-۱ آمده است:

جدول ۳-۱- روابط مربوط به خطای حالت دائمی برای سیستم های نوع صفر تا ۲

سیستم	خطای حالت دائمی در پاسخ به		
	ورودی پله	ورودی شیب	ورودی شتاب
نوع صفر	$\frac{1}{1+K_p}, K_P=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)$	∞	∞
نوع یک	0	$\frac{1}{K_v}, K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)$	∞
نوع دو	0	0	$\frac{1}{K_a}, K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)$

K_p را ثابت خطای پله، K_v را ثابت خطای شیب و K_a را ثابت خطای شتاب[1] گویند. درصورتیکه فیدبک سیستم واحد باشد، داریم:

$$H(s)=1\to$$
$$E(s)=R(s)-C(s)$$
$$C(s)=\frac{G(s)}{1+\underbrace{H(s)}_{1}G(s)}R(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$$

$$\to E(s)=R(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)=R(s)\left(1-\frac{G(s)}{1+G(s)}\right)=R(s)\left(\frac{1+\cancel{G(s)-G(s)}}{1+G(s)}\right)=R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)$$

$$E(s)=R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right) \qquad ۴-۳$$

[1] توجه کنید که ورودی شتاب بصورت استاندارد بصورت $\frac{1}{2}t^2$ تعریف می گردد.

اکنون با توجه به تعریف ۳-۳ خطای حالت دائمی سیستم نوع N با فیدبک واحد را محاسبه می کنیم:

$$E(s)=R(s)\left(\frac{1}{1+\frac{k(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)e^{-T_d s}}{s^N(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}}\right)$$

$$=R(s)\left(\frac{s^N(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)+k(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)e^{-T_d s}}\right)$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sR(s)\left(\frac{s^N(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)+k(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)e^{-T_d s}}\right)$$

$$=\lim_{s\to 0} sR(s)\left(K s^N\right)=$$

$$e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s) \qquad ,K=\frac{p_1p_2...p_m}{k(z_1z_2...z_n)} \tag{۴-۳}$$

بنابراین، خطای حالت دائمی برای سیستم ۳-۳ با فیدبک واحد، به ورودی و نوع سیستم بستگی دارد. بهترین حالت برای یک سیستم، داشتن خطای حالت دائمی صفر می باشد، اکنون بسته به نوع سیستم خطای حالت دائمی را به ورودی های پله، شیب و شتاب بررسی می کنیم:

الف) سیستم نوع صفر: اگر سیستم نوع صفر باشد ($N=0$)، برای سه ورودی پله، شیب و شتاب و با توجه به ۳-۴ داریم:

$$R(s)=\frac{1}{s}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} \cancel{s^{0+1}}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)=K$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} \cancel{s^{0+1}}\left(\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s}=\infty$$

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} \cancel{s^{0+1}}\left(\frac{1}{s^{\cancel{3}}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^2}=\infty$$

ب) سیستم نوع یک: اگر سیستم نوع صفر باشد ($N=1$)، برای سه ورودی پله، شیب و شتاب و با توجه به ۳-۴ داریم:

$$R(s)=\frac{1}{s}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} s^{1+\cancel{1}}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)=0$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} \cancel{s^{1+1}}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\right)=K$$

$$R(s)=\frac{1}{s^3}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} \cancel{s^{1+1}}\left(\frac{1}{s^{\cancel{3}}}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s}=\infty$$

ج) سیستم نوع دو: اگر سیستم نوع صفر باشد ($N=2$)، برای سه ورودی پله، شیب و شتاب و با توجه به ۳-۴ داریم:

$$R(s)=\frac{1}{s}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} s^{2+\cancel{1}}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\right)=0$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\to e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0} s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0} s^{\cancel{2}+1}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\right)=0$$

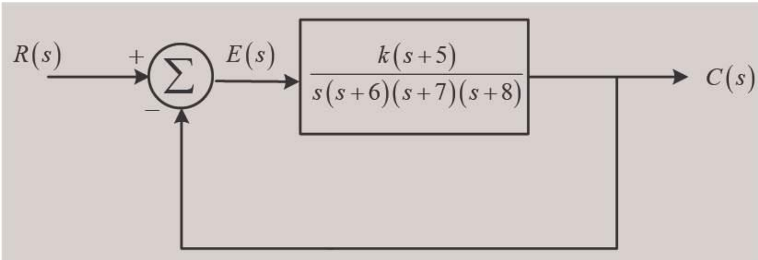
$$R(s)=\frac{1}{s^3}\rightarrow e_{ss}(\infty)=K\lim_{s\to 0}s^{N+1}R(s)=K\lim_{s\to 0}\cancel{s^{2+1}}\left(\frac{1}{\cancel{s^3}}\right)=K$$

> ❖ **نکته:**
> خطای حالت دائمی برای سیستم پایدار تعریف می گردد.

به مثال زیر توجه کنید:

◀ مثال ۳-۵

مقدار k را طوری تعیین کنید که خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر 10% باشد:



حل:

برای بررسی خطای حالت دائمی ابتدا باید پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد، به منظور بررسی پایداری ابتدا معادله مشخصه را محاسبه نموده و جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)}}{1+\frac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)}}=\frac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)}$$

$$\rightarrow\Delta(s)=s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)=s^4+21s^3+146s^2+(336+k)s+5k$$

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 146 & 5k\\
s^3 & 21 & (336+k) & 0\\
s^2 & \frac{\overbrace{21\times146-(336+k)}^{2730-k}}{\cancel{21}} & \frac{\overbrace{21\times5k}^{105k}}{\cancel{21}} & 0\\
s & \frac{(2730-k)\times(336+k)-105k\times21}{2730-k} & 0 & 0\\
1 & 105k & 0 & 0
\end{array}
\rightarrow\begin{cases}2730-k>0\\(2730-k)\times(336+k)-125k\times21>0\\105k>0\end{cases}$$

بنابراین:

$$\rightarrow\begin{cases}k<2730\\-k^2+189k+917280>0\\k>0\end{cases}$$

برای تعیین علامت معادله دوم ابتدا باید ریشه های آن بدست آید:

$$-k^2-231k+917280=0 \rightarrow k=-1080.1,849.1$$

	-1080.1		849.1	
$-$		$+$		$-$

بنابراین:

$$\rightarrow \begin{cases} k<2730 \\ -1080.1<k<849.1 \rightarrow 0<k<849.1 \\ k>0 \end{cases}$$

اکنون مقدار k را برای رسیدن به خطای حالت دائمی 10% محاسبه می کنیم. مقدار k بدست آمده باید در شرط فوق صدق کند.

$$\begin{cases} R(s)=\dfrac{1}{s^2} \\ G(s)=\dfrac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)} \end{cases} \rightarrow E(s)=R(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{k(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8)}}\right)$$

$$\rightarrow E(s)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{s(s+6)(s+7)(s+8)}{s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)}\right)$$

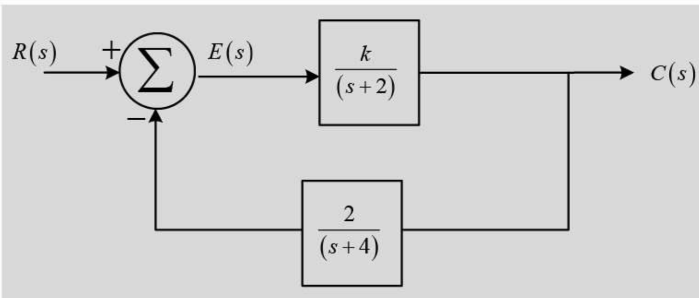
$$\rightarrow e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\frac{1}{\cancel{s^2}}\left(\frac{\cancel{s}(s+6)(s+7)(s+8)}{s(s+6)(s+7)(s+8)+k(s+5)}\right)=\frac{336}{5k}$$

$$\rightarrow \frac{336}{5k}=\frac{1}{10}\rightarrow k=672$$

که این مقدار در شرط $0<k<849.1$ صدق می کند بنابراین این مقدار قابل قبول است.

◄ مثال ۳-۶

مقدار k را طوری تعیین کنید که خطای حالت دائمی به ورودی پله 0.02 باشد:



حل:

برای بررسی خطای حالت دائمی ابتدا باید پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد، به منظور بررسی پایداری ابتدا معادله مشخصه را محاسبه نموده و جدول روث را تشکیل می دهیم:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{k}{(s+2)}}{1+\dfrac{k}{(s+2)}\dfrac{2}{(s+4)}}=\frac{k(s+4)}{(s+2)(s+4)+2k}$$

$$\rightarrow \Delta(s)=(s+2)(s+4)+2k=s^2+6s+(8+2k)$$

$$\begin{array}{llll} s^2 & 1 & 8+2k & \\ s & 6 & 0 & \rightarrow 8+2k>0 \rightarrow k>-4 \\ 1 & 8+2k & 0 & \end{array}$$

اکنون مقدار k را برای رسیدن به خطای حالت دائمی 0.02 محاسبه می کنیم. مقدار k بدست آمده باید در شرط فوق صدق کند.

$$\begin{cases} R(s)=\dfrac{1}{s} \\ GH(s)=\dfrac{2k}{(s+2)(s+4)} \end{cases} \rightarrow K_p=\lim_{s\to 0} GH(s)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{2k}{(s+2)(s+4)}\right)=\frac{k}{4}$$

$$\rightarrow e_{ss}(\infty)=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+\frac{k}{4}}=\frac{4}{k+4}=0.02 \rightarrow 0.02k=4-4\times 0.02 \rightarrow k=195$$

که این مقدار در شرط $k>-4$ صدق می کند، بنابراین این مقدار قابل قبول است.

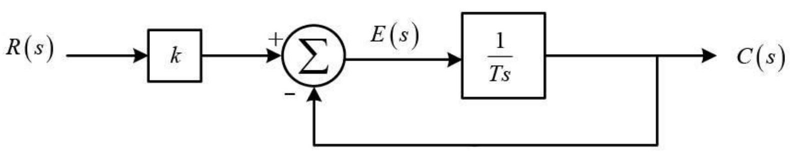
اکنون با این داشته ها می توانیم به بحث پاسخ گذرای سیستم بپردازیم. از آنجا که اکثر سیستم های مورد استفاده مرتبه ای کمتر از ۳ دارند، برای درک بهتر این موضوع، سیستم های مرتبه یک و دو را بطور مجزا بررسی می نماییم:

۳-۵- بررسی پاسخ گذرا:

گرچه مقدار نهایی پاسخ و اختلاف آن با پاسخ مطلوب[1]، در طراحی سیستم های کنترلی، از مهمترین عوامل مورد بررسی است، اما نحوه رسیدن پاسخ سیستم به این مقدار نیز برای ما اهمیت دارد. تغییرات پاسخ (نوسانات میرا) باید بگونه ای باشند که از محدوده مجاز قابل تحمل سیستم فراتر نروند، همچنین هر چه دوره زمانی پاسخ گذرا کوتاه تر باشد، سرعت عملکرد سیستم بالاتر خواهد بود. بدین منظور، پاسخ گذرای سیستم ها باید به خوبی مورد بررسی قرار گیرد.

۳-۵-۱- سیستم های مرتبه اول:

یک سیستم مرتبه اول نمونه، سیستمی است که دارای



شکل ۳-۷: سیستم مرتبه اول

تابع تبدیل حلقه بسته این سیستم بصورت

$$T(s)=k\frac{\frac{1}{Ts}}{1+\frac{1}{Ts}}=\frac{k}{1+Ts} \qquad ۳-۵$$

خواهد بود.

[1] Set Point

اکنون شکل عمومی پاسخ پله این سیستم را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} R(s)=\dfrac{1}{s} \\ T(s)=\dfrac{k}{1+Ts} \end{cases} \rightarrow C(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}=\frac{k}{Ts\left(\dfrac{1}{T}+s\right)}=\frac{k}{s}-\frac{k}{\left(s+\dfrac{1}{T}\right)}$$

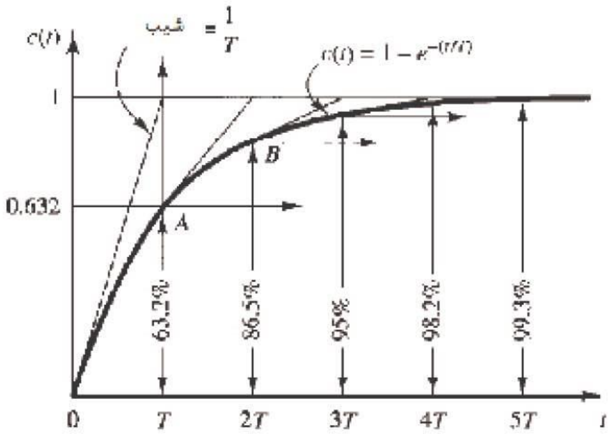
$$\rightarrow c(t)=k\left(1-e^{\frac{-t}{T}}\right)u(t)$$

که در آن T ثابت زمانی سیستم خوانده می شود، اگر $\frac{-1}{T}<0$ باشد، سیستم پایدار خواهد بود. با توجه به پاسخ بدست آمده می توان بخش گذرا و پاسخ مقدار نهایی را بدست آورد:

$$c(t)=k\left(1-e^{\frac{-t}{T}}\right)u(t)=\underbrace{ku(t)}_{y_{ss}(\infty)}\underbrace{-ke^{\frac{-t}{T}}u(t)}_{y_t(t)}$$

$$y_t(t)=-ke^{\frac{-t}{T}}u(t)$$
$$y_{ss}(\infty)=ku(t)$$

برای بهره واحد شکل عمومی پاسخ پله سیستم مرتبه اول بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۳-۸: پاسخ پله سیستم مرتبه اول با $k=1$

❖ **نکات:**

- پس از گذشت زمانی حدوداً، ۴ الی ۵ برابر ثابت زمانی پاسخ تقریبا به مقدار نهایی خود نزدیک می شود.
- سیستم مرتبه اول تعریف شده نوع یک می باشد، بنابراین خطای حالت دائمی آن به ورودی پله برابر صفر است. (این موضوع به خوبی در شکل دیده می شود)

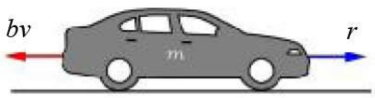
بطور مثال مدارهای RL، RC دارای تابع تبدیل مرتبه اول می باشند.

◄ مثال ۳-۷

سیستم کنترل سرعت v که در اکثر وسائل نقلیه وجود دارد، دارای تابع تبدیل حلقه باز به فرم

$$G(s)=\frac{V(s)}{R(s)}=\frac{1}{ms+b}$$

می باشد، که در آن m جرم وسیله نقلیه و b ضریب اصطکاک می باشد. پاسخ پله حلقه بسته این سیستم با فیدبک واحد را برای $m=1000^{gr}, b=50^{\frac{N.s}{m}}$ بررسی نمایید.



حل:

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم:

$$T(s)=\frac{\frac{1}{1000s+50}}{1+\frac{1}{1000s+50}}=\frac{1}{1000s+51}$$

بنابراین پاسخ پله این سیستم عبارتست از:

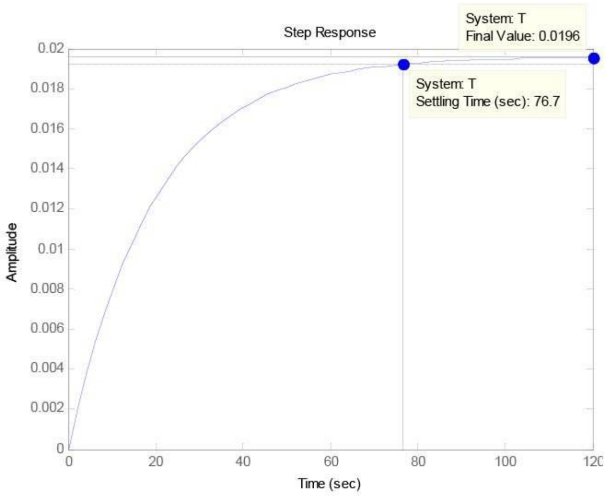
$$\begin{cases} R(s)=\frac{1}{s} \\ T(s)=\frac{1}{1000s+51} \end{cases} \to V(s)=\frac{1}{1000s(s+0.051)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+0.051)}$$

$$A=\lim_{s\to 0} sV(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1000(s+0.051)}=\frac{1}{51}=0.0196$$

$$B=\lim_{s\to -0.051}(s+0.051)V(s)=\lim_{s\to -0.051}\frac{1}{1000s}=-\frac{1}{51}=-0.0196$$

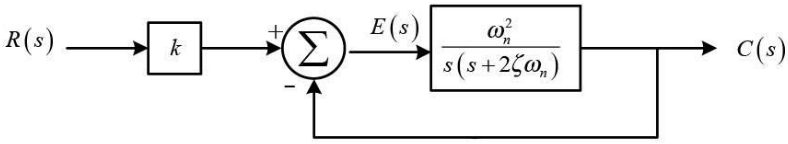
$$\to V(s)=\frac{1}{51}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+0.051}\right)\to v(t)=0.0196\left(1-e^{-0.051t}\right)u(t)$$

ثابت زمانی این سیستم برابر $T=\frac{1}{0.051}=19.6$ می باشد، بنابراین انتظار داریم در زمانی برابر $4\times 19.6=76.4^{s}$ پاسخ سیستم به پاسخ نهایی نزدیک شده باشد:



۳-۵-۲- سیستم های مرتبه دوم:

یک سیستم مرتبه دوم نمونه، سیستمی است که دارای



شکل ۳-۹: سیستم مرتبه دوم

تابع تبدیل حلقه بسته این سیستم بصورت

$$T(s)=k\frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad ۳-۶$$

خواهد بود. بنابراین:

$$\Delta(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \qquad ۳-۷$$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d} \qquad ۳-۸$$

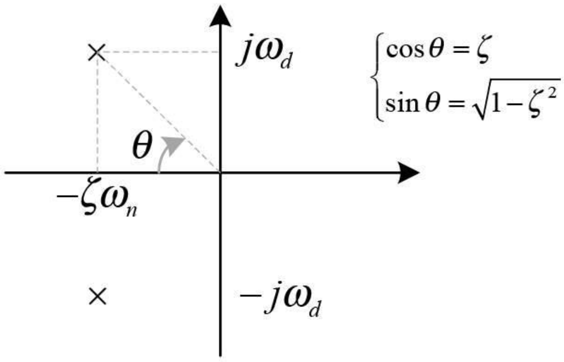
که در آن ζ نسبت میرایی[1]، ω_n فرکانس طبیعی[2] نامیده می شوند.

سیستم مرتبه دوم ۳-۶ در صورتی پایدار خواهد بود که:

$$-\zeta\omega_n<0\rightarrow\zeta\omega_n>0$$

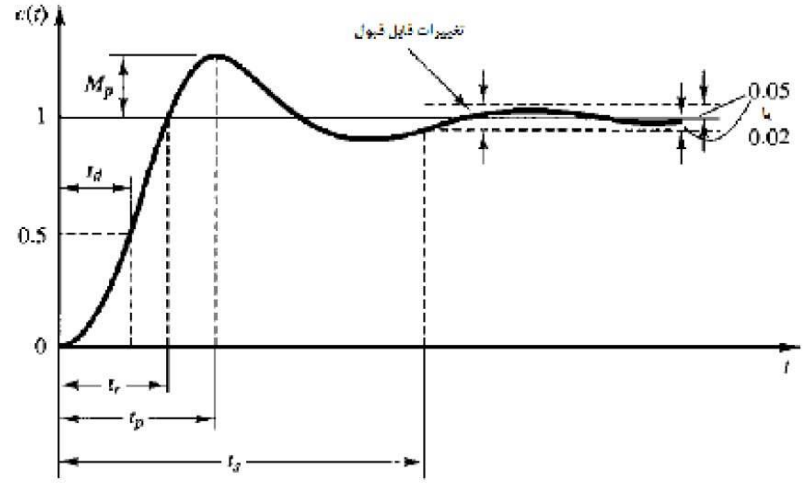
از آنجا که فرکانس طبیعی همواره مثبت است، سیستم مرتبه دوم در صوتیکه $0<\zeta$ باشد، پایدار خواهد بود.

[1] Damping Ratio
[2] Natural Frequency



شکل ۳-۱۰: مکان ریشه های سیستم مرتبه دوم در صفحه S

اکنون شکل عمومی پاسخ پله این سیستم را بررسی می کنیم:



شکل ۳-۱۱: شکل عمومی پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم

از آنجا که پاسخ پله مهمترین فاکتور برای بررسی سیستم ها می باشد، تحلیل پاسخ گذرای مربوط به آن نیز از اهمیت زیادی برخوردار است. با توجه به شکل ۳-۱۱ پارامترهای مهم این پاسخ را بعنوان تعریف ارائه می کنیم:

❖ **تعاریف مهم:**

۱- زمان تاخیر (t_d): زمانی است که طول می کشد تا پاسخ برای اولین بار به نصف مقدار نهایی خود برسد.

۲- زمان **صعود** (t_r): مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ از صفر تا ۱۰۰ درصد مقدار نهایی خود برسد. (در بعضی از متون ۱۰٪ تا ۹۰٪ یا ۵٪ تا ۹۵٪ هم آمده است.)

۳- ماکزیمم فراجهش ($M_P / O.S$): مقدار اوج فراجهش که نسبت به مقدار ۱ اندازه گیری می شود.

۴- زمان اوج (t_P): زمانی است که اولین ماکزیمم (فراجهش) اتفاق می افتد.

۵- زمان نشست (t_s): زمانی که طول می کشد تا پاسخ به تغییرات قابل قبولی در حدود ۲ تا ۵٪ مقدار نهایی برسد و در آن محدوده نیز باقی بماند.

پنج پارامتر زمان تأخیر[1]، زمان صعود[2]، زمان اوج[3]، ماکزیمم فراجهش[4] و زمان نشست[5] را پارامترهای پاسخ گذرا می نامند. مشخصات پاسخ گذرا با فرض ($\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$) بصورت زیر بدست می آید:

$$t_d \cong \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} \qquad \text{۹-۳}$$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_d} \qquad \text{۱۰-۳}$$

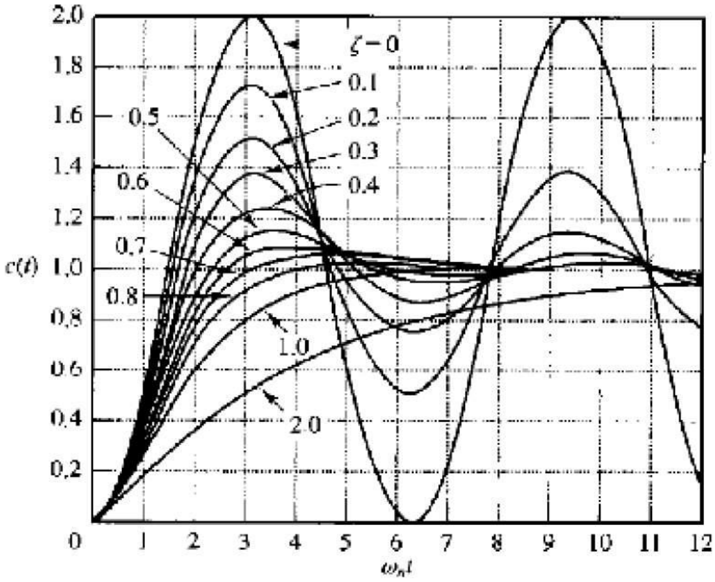
$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad \text{۱۱-۳}$$

$$M_P = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 \qquad \text{۱۲-۳}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}\ (\text{٪۲}) \qquad t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n}\ (\text{٪۵}) \qquad \text{۱۳-۳}$$

با توجه به فرمول ۳-۱۲ می بینیم که مقدار فراجهش سیستم تنها به پارامتر ζ بستگی دارد. بسته به مقادیر مختلف آن شکل پاسخ سیستم می تواند هر یک از شکلهای زیر باشد:

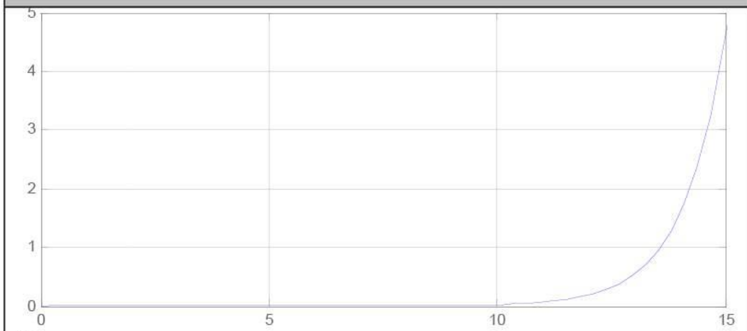
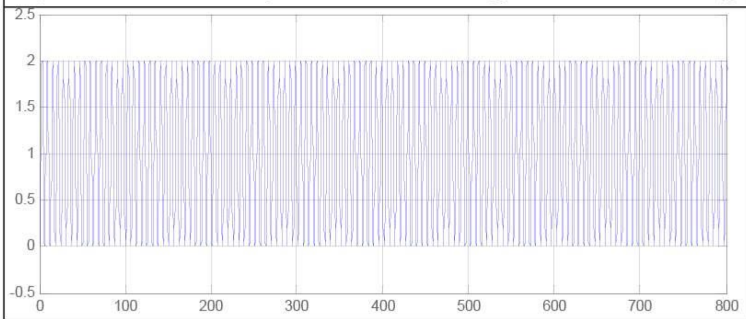
[1] Delay Time
[2] Rise Time
[3] Peak Time
[4] Maximum Peak (Over Shoot)
[5] Settling Time

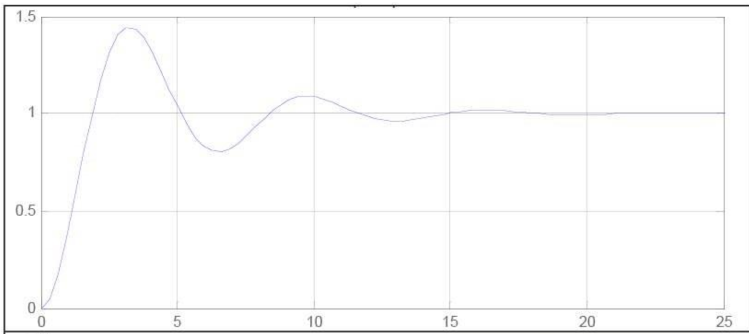
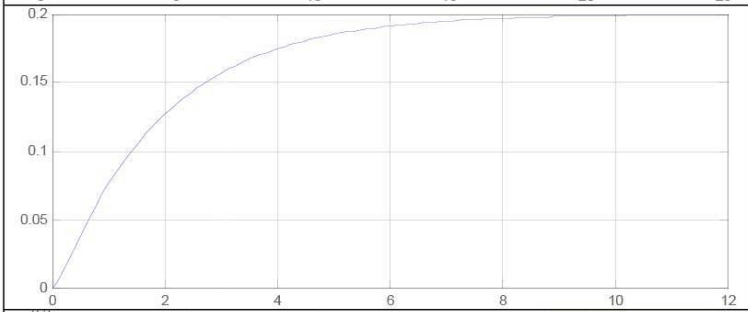
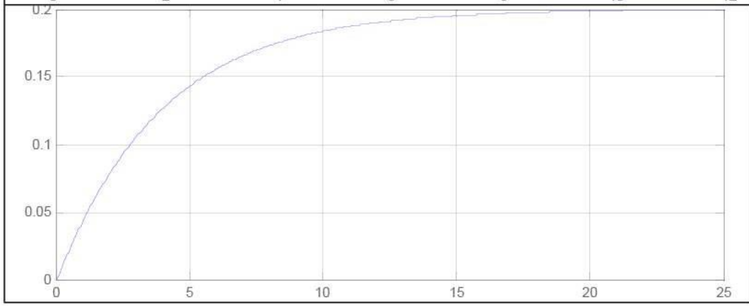


شکل ۳-۱۲: انواع پاسخ پله سیستم مرتبه دوم

برای درک بهتر رابطه بین ζ و شکل پاسخ سیستم، حالت های مختلف شکل ۳-۱۲ بصورت یک جدول مجزا نمایش داده شده است.

جدول ۳-۲ ارتباط بین ζ و نوع پاسخ پله سیستم

شکل عمومی پاسخ	نام و فرم پاسخ	مقدار ζ
	**پاسخ ناپایدار** $y(t)=ke^{C_1 t}u(t), C_1>0$	$\zeta<0$
	**پاسخ نوسانی نامیرا** $y(t)=(k_1\sin C_1 t+k_2\cos C_2 t)u(t)$	$\zeta=0$

$0<\zeta<1$	**پاسخ میرای نوسانی** $y(t)=e^{-c_1 t}\left(k_1\sin C_1 t+k_2\cos C_2 t\right)u(t)$ $C_1>0$	
$\zeta=1$	**پاسخ میرای بحرانی** $y(t)=k\left(1-e^{-c_1 t}u(t)\right), C_1>0$	
$\zeta>1$	**پاسخ میرای شدید** $y(t)=k\left(1-e^{-c_1 t}u(t)\right), C_1>0$	

◀ مثال ۳-۸

یک موتور DC با تابع تبدیل حلقه باز

$$G(s)=\frac{v_\theta(s)}{V(s)}=\frac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.01}$$

را در نظر بگیرید. پارامترهای پاسخ گذرا را برای این سیستم حلقه بسته شامل فیدبک واحد محاسبه نمایید:

حل:

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم:

$$T(s)=\frac{\dfrac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.01}}{1+\dfrac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.01}}=\frac{0.01}{0.005s^2+0.006s+0.02}=\frac{2}{s^2+1.2s+4}$$

از مقایسه معادله مشخصه این سیستم با رابطه ۳-۷ مقادیر میرایی و فرکانس طبیعی بدست می آیند:

$$s^2+1.2s+4\equiv s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\rightarrow\begin{cases}2\zeta\omega_n=1.2\\ \omega_n^2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\zeta=0.3\\ \omega_n=2\end{cases}\rightarrow\omega_d=1.9$$

با توجه به مقدار ζ پاسخ، میرای نوسانی خواهد بود. اکنون پارامترهای پاسخ گذرای مربوطه را محاسبه می کنیم:

$$t_d \cong \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} = 0.605$$

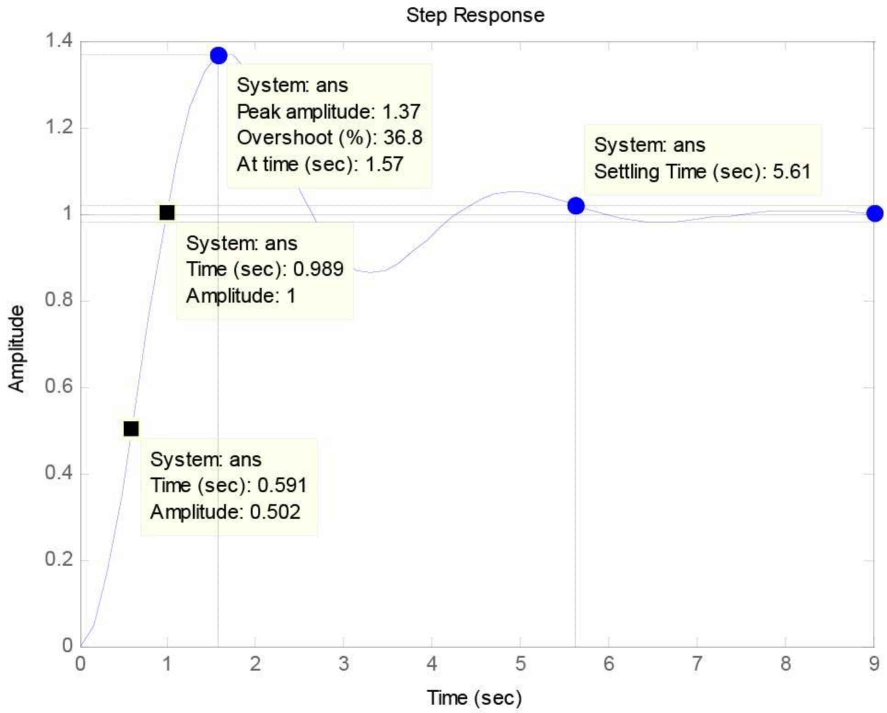
$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_d} = \frac{\pi - \overbrace{\cos^{-1}0.3}^{1.26}}{\omega_d} = 0.98$$

$\cos^{-1}\zeta$ برحسب رادیان محاسبه گردد.

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} = 1.64$$

$$M_P = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 37\%$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 6.67$$

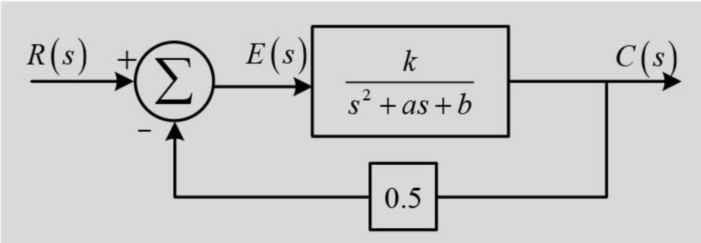


◄ مثال ۳-۹

در سیستم فوق پارامترهای مجهول را بگونه ای بیابید که

$$\begin{cases} M_P > 5\% \\ t_s < 1^s \\ e_{ss}(\infty) = 0 \end{cases}$$

باشد.



حل:

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم:

$$T(s)=\frac{\dfrac{k}{s^2+as+b}}{1+\dfrac{0.5k}{s^2+as+b}}=\frac{k}{s^2+as+(b+0.5k)}$$

از مقایسه معادله مشخصه این سیستم با رابطه ۳-۷ مقادیر میرایی و فرکانس طبیعی بدست می آیند:

$$s^2+as+(b+0.5k)\equiv s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\rightarrow\begin{cases}2\zeta\omega_n=a\\ \omega_n^2=(b+0.5k)\end{cases}$$

$$M_P=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100>5\rightarrow e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}>0.05\rightarrow\ln\left(e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)>\ln(0.05)\approx-3$$

$$\rightarrow-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}>-3\rightarrow\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}<3\rightarrow\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2<9$$

$$\rightarrow\pi^2\zeta^2<9(1-\zeta^2)=9-9\zeta^2\rightarrow\zeta^2<\frac{9}{9+\pi^2}\rightarrow\boxed{0<\zeta<0.69}\rightarrow\zeta=0.5$$

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}<1\rightarrow0.5\omega_n>4\rightarrow\boxed{\omega_n>8}\rightarrow\omega_n=9$$

$$e_{ss}(\infty)=0\rightarrow c_{ss}(\infty)=1$$

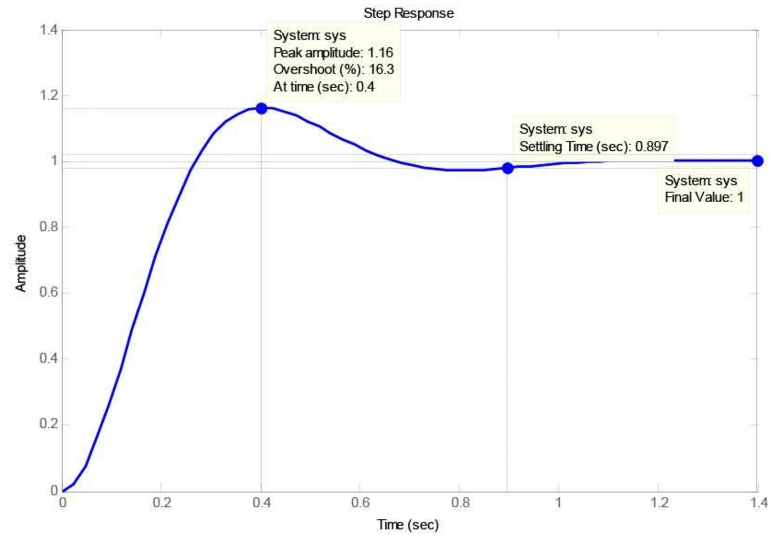
سیستم نوع صفر است، تنها به ورودی پله می تواند خطای حالت دائمی ثابت داشته باشد:

$$c_{ss}(\infty)=\lim_{s\to0}sC(s)=\lim_{s\to0}sR(s)T(s)=\lim_{s\to0}\cancel{s}\times\frac{1}{\cancel{s}}\left(\frac{k}{s^2+as+(b+0.5k)}\right)=\frac{k}{(b+0.5k)}=1$$

$$\rightarrow k=b+0.5k\rightarrow0.5k=b\rightarrow k=2b$$

$$\begin{cases}2\zeta\omega_n=a\\ \omega_n^2=(b+0.5k)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2\times0.5\times9=a\\ \omega_n^2=(b+0.5k)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=9\\ 81=b+0.5(2b)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=9\\ b=41.5\\ k=81\end{cases}$$

پاسخ پله این سیستم در صفحه بعد رسم شده است. مشخصات زمانی پاسخ گذرای این سیستم همانطور که در شکل هم دیده می شود، با مشخصات مطلوب همخوانی دارد.



◄ مثال ۳-۱۰

برای سیستم مرتبه دوم شکل ۳-۹ با $k=1$، محل قطب های حلقه بسته را چنان تعیین کنید که

$$\begin{cases} M_P < 4.32\% \\ t_s < 2^s \end{cases}$$

باشد.

حل:

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$M_P=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100<4.32 \rightarrow e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}<0.0432 \rightarrow \ln\left(e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)<\ln(0.0432)\approx -3.14$$

$$\rightarrow -\frac{\cancel{\pi}\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}<-\cancel{3.14} \rightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}>1$$

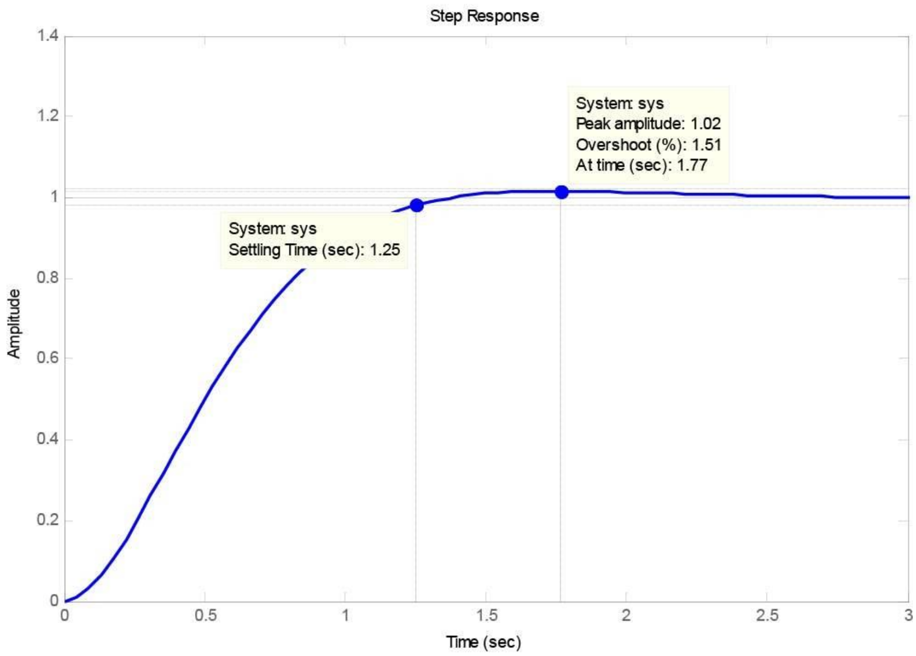
$$\rightarrow \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2<1 \rightarrow \zeta^2<\left(1-\zeta^2\right)=1-\zeta^2$$

$$\rightarrow \zeta^2<\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\zeta>0.707} \rightarrow \zeta=0.8$$

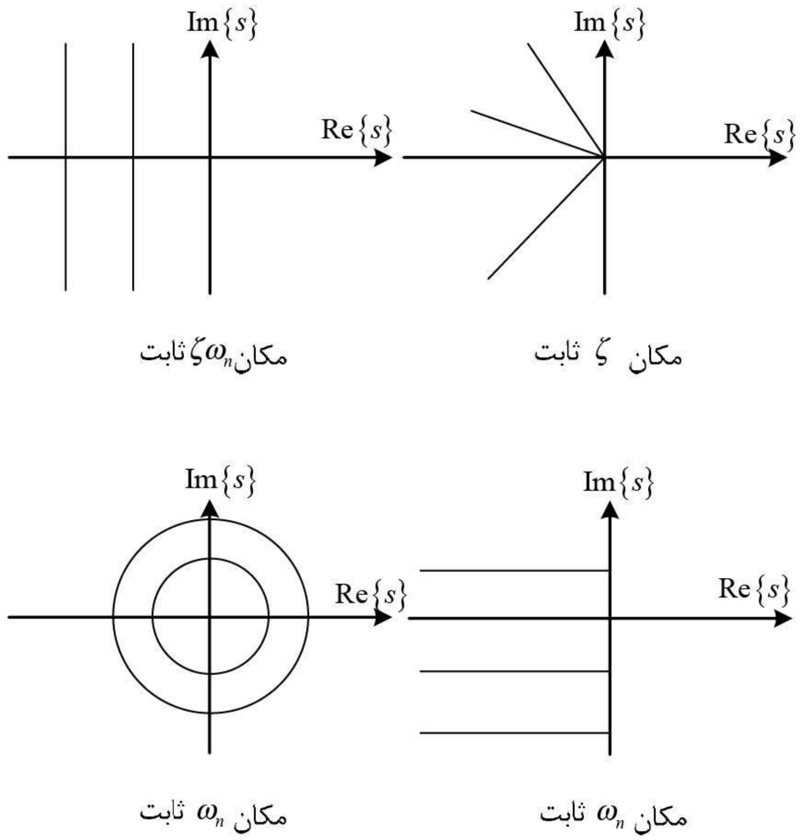
$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}<2 \rightarrow 2\times 0.8\times\omega_n>4 \rightarrow \boxed{\omega_n>2.5} \rightarrow \omega_n=3$$

$$\rightarrow s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\sqrt{1-\zeta^2}=-2.4\pm j1.8$$

پاسخ پله این سیستم در صفحه بعد رسم شده است. مشخصات زمانی پاسخ گذرای این سیستم همانطور که در شکل هم دیده می‌شود، با مشخصات مطلوب همخوانی دارد.



شکل های زیر مکان های ثابت در صفحه s را نشان می دهد:



شکل ۳-۱۳: مکان های ثابت در صفحه s

۳-۵-۳- سیستم های مرتبه بالاتر:

تحلیل سیستم های مرتبه بالاتر، به دلیل پیچیدگی روابط موجود به راحتی سیستم های مرتبه یک و دو نبوده و معمولاً برای بررسی چنین سیستم هایی بجز مواردی که بتوان مرتبه سیستم را کاهش داد، از روش های دستی استفاده نمی شود.
اگر موقعیت قطبی نسبت به دیگر قطب های سیستم پنج تا ده برابر متفاوت باشد، (پنج تا ده برابر بزرگتر یا کوچکتر) می توان تاثیر آن در تابع تبدیل را حذف نمود.

❖ **نکته:**
مقدار تابع تبدیل یک سیستم در فرکانس صفر یعنی $s=0$ را بهره DC سیستم گویند. در ساده سازی تابع تبدیل یک سیستم بهره DC سیستم نباید تغییر کند.

بطور مثال:

$$\begin{cases} G(s)=\dfrac{10}{(s+10)(s^2+2s+2)} \\ DC\,Gain:G(0)=\dfrac{10}{10\times 2}=0.5 \end{cases} \rightarrow G'(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$$

بخش چهارم:

بررسی پایداری سیستم های کنترلی

بخش چهارم: بررسی پایداری سیستم های کنترلی

۴-۱- مقدمه:

در فصل گذشته یکی از روشهای بررسی پایداری سیستم های کنترلی را آموختیم. در روش روث – هورویتز، تنها پایداری مطلق یک سیستم را می توان بررسی نمود. سه روش باقیمانده که در این فصل آموزش داده می شوند، برای بررسی پایداری مطلق و نسبی بکار می روند.

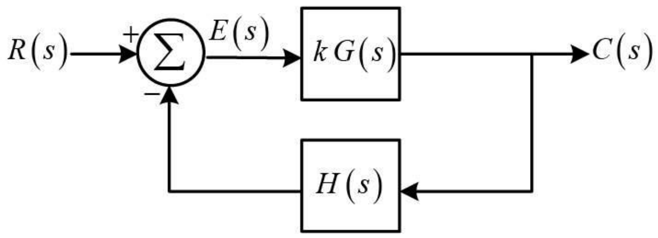
سه روش مکان ریشه ها، دیاگرام نایکوئیست و نمودارهای بودی، سه روش اصلی و اساسی تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی به شمار می روند.

۴-۲- بررسی پایداری به روش مکان ریشه ها:

همانطور که در بخش قبل دیدیم، مشخصات اساسی پاسخ گذرای یک سیستم حلقه بسته، به محل قطب های آن وابسته است. اگر سیستم بهره متغیری داشته باشد، محل قطب های حلقه بسته به مقدار بهره انتخاب شده برای حلقه بستگی خواهند داشت. پس دانستن این که با تغییر بهره حلقه محل قطب های حلقه بسته در صفحه s چگونه تغییر می کند برای مهندسین طراح بسیار مهم است.

از دید طراحی، در بعضی از سیستمها یک اصلاح ساده بهره می تواند قطب های حلقه بسته را به محل مطلوب ببرد. به این ترتیب مسئله طراحی به انتخاب مناسب بهره حلقه می انجامد. اگر اصلاح بهره به تنهایی نتواند به نتیجه مطلوب منجر شود، افزودن یک جبرانساز به سیستم ضروری خواهد بود.

در روش مکان ریشه ها[1]، ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته به ازای یک پارامتر مجهول که معمولاً بهره سیستم است، رسم می گردند. بار دیگر دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته را در نظر بگیرید:



شکل ۴-۱: دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته

معادله مشخصه چنین سیستمی بصورت:

$$T(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}\rightarrow$$

$$\Delta(s)=1+KG(s)H(s)=0 \qquad ۱-۴$$

خواهد بود. بنابراین همانطور که مشخص است، جایگاه ریشه های حلقه بسته به مقدار K بستگی دارد. بسته به مثبت یا منفی بودن مقدار K شروط مربوط به رسم مکان ریشه ها متفاوت خواهد بود.

[1] Root Locus

۴-۲-۱- قواعد رسم مکان ریشه برای $0<K$

برای $K>0$ رابطه ۴-۱ را می توان بصورت دو شرط کلی بیان نمود:

$$|F(z)|=\frac{1}{K} \qquad ۴-۲$$

$$\angle F(z)=(2k+1)\pi \quad k=0,1,2,... \qquad ۴-۳$$

که رابطه ۴-۲ را شرط اندازه و رابطه ۴-۳ را شرط زاویه گویند. مقادیری از s که هر دو شرط را برآورده نمایند ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته می باشند. مراحل رسم مکان ریشه برای $K>0$ بصورت زیر است:

- ابتدا برای تابع تبدیل $T(s)$ محل قطب ها و صفرها را در صفحه s تعیین می کنیم.
- تعداد قطب و صفر بینهایت (تعداد مجانب مربوطه) را مشخص می کنیم. تعداد صفر و قطب در بینهایت برابر اختلاف تعداد قطب و صفر $(n-m)$ است.
- مکان ریشه ها از قطب شروع و در صفر پایان می یابد.
- مکان روی محور حقیقی جایی است که سمت راست آن تعداد فردی قطب یا صفر وجود داشته باشد.
- محل تلاقی مجانب ها (σ) و زاویه مجانبی (φ) بصورت زیر بدست می آیند

$$\sigma=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m} \qquad ۴-۴$$

$$\varphi=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad ۴-۵$$

- نقاط شکست مکان جایی وجود دارند که مکان بین دو قطب یا دو صفر قرار گیرد. (هرگاه دو قطب یا دو صفر در کنار هم و روی محور حقیقی قرار گیرند همواره در بین آن دو نقطه شکست خواهیم داشت.) این نقاط از حل معادله زیر بدست می آیند:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{F(s)}\right)=0 \qquad ۴-۶$$

- مقدار پارامتر K در هر نقطه از مکان از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{d_1d_2...d_n}{\ell_1\ell_2...\ell_m} \qquad ۴-۷$$

- که در آن d_i فاصله نقطه مورد نظر از قطب و ℓ_i فاصله از صفر هاست.
- زاویه خروج از قطب مختلط بصورت زیر بدست می آید:

$$\theta+\left(\text{مجموع زوایای قطب مختلط با دیگر قطبها}\right)-\left(\text{مجموع زوایای قطب مختلط با دیگر صفرها}\right)=180 \qquad ۴-۸$$

- مکان ریشه ها نسبت به محور حقیقی، متقارن خواهد بود.

◀ مثال ۴-۱

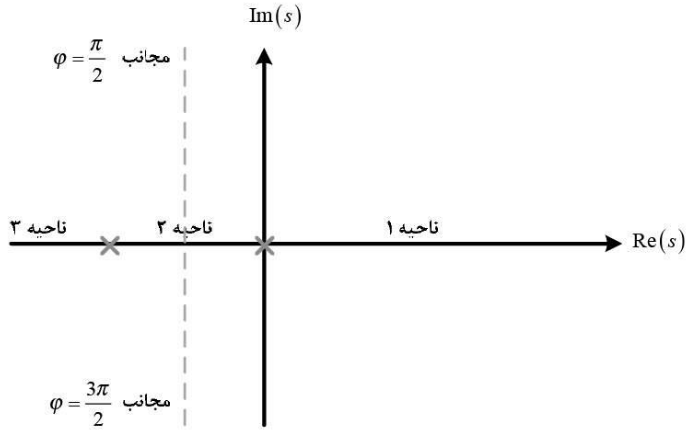
مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K>0$ رسم نمایید.

$$\Delta(s)=1+K\frac{1}{s(s+2)}$$

حل:

برای رسم مکان ریشه ها مراحل ۹ گانه فوق را به ترتیب انجام می دهیم:

$$T(s)=\frac{1}{s(s+2)}\rightarrow\begin{cases}p_1=0\\p_2=-2\end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =۲ ◀ دو زاویه مجانبی لازم داریم:

$$\varphi=\frac{(2k+1)\pi}{2}=\left\{\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{k=0},\underbrace{\frac{3\pi}{2}}_{k=1}\right\},\qquad \sigma=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{0+(-2)}{2}=-1$$

سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) ◀ مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۲ یک قطب وجود دارد (فرد) ◀ مکان هست. ◀ بین دو قطب ◀ نقطه شکست داریم.

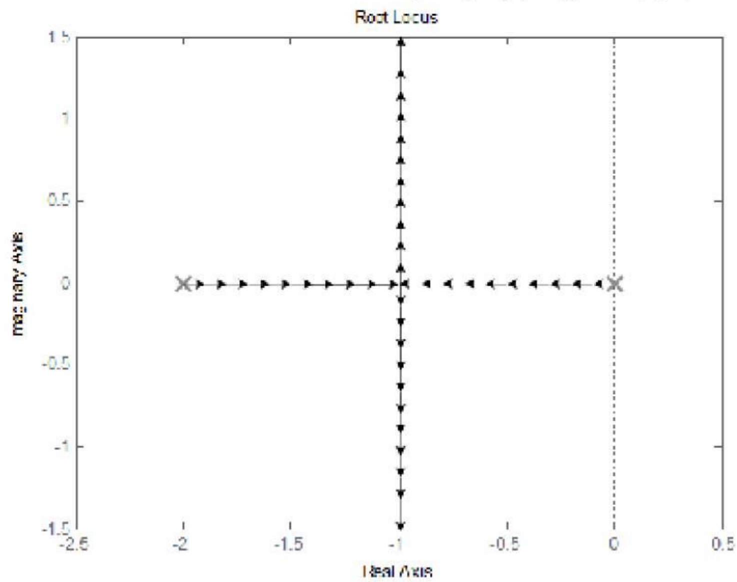
سمت راست ناحیه ۳ دو قطب وجود دارد (زوج) ◀ مکان نیست.

$$T(s)=\frac{1}{s(s+2)}\rightarrow-\frac{1}{T(s)}=-s(s+2)$$

$$\rightarrow\frac{d}{ds}\left(-s(s+2)\right)=-(2s+2)=0$$

$$\rightarrow 2s+2=0\rightarrow s=-1\ \boxed{\checkmark}$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود.



◄ مثال ۴-۲

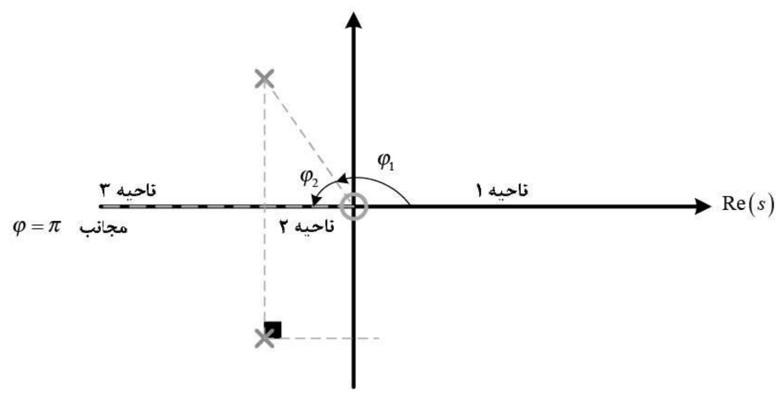
مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K>0$ رسم نمایید.

$$\Delta(s)=1+K\frac{s}{s^2+2s+5}$$

حل:

برای رسم مکان ریشه ها مراحل ۹ گانه را به ترتیب انجام می دهیم:

$$T(s)=\frac{s}{s^2+2s+5}\rightarrow\begin{cases}z_1=0\\ s^2+2s+5=0\rightarrow p_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\dfrac{-2\pm4j}{2}=-1\pm2j\end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =۱ ◄ یک زاویه مجانبی لازم داریم و محل برخورد مجانب ها دیگر معنی ندارد:

$$\varphi=\frac{(2k+1)\pi}{1}=\left\{\underbrace{\pi}_{k=0}\right\}$$

سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) ◄ مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۲ یک صفر وجود دارد (فرد) ◄ مکان هست.

سمت راست ناحیه ۳ سه صفر و قطب وجود دارد (فرد) ◄ مکان هست.

بین دو ناحیه ۲ و ۳، مکان بین دو صفر قرار دارد ◄ نقطه شکست داریم.

$$T(s)=\frac{s}{s^2+2s+5}\rightarrow-\frac{1}{T(s)}=-\frac{s^2+2s+5}{s}$$

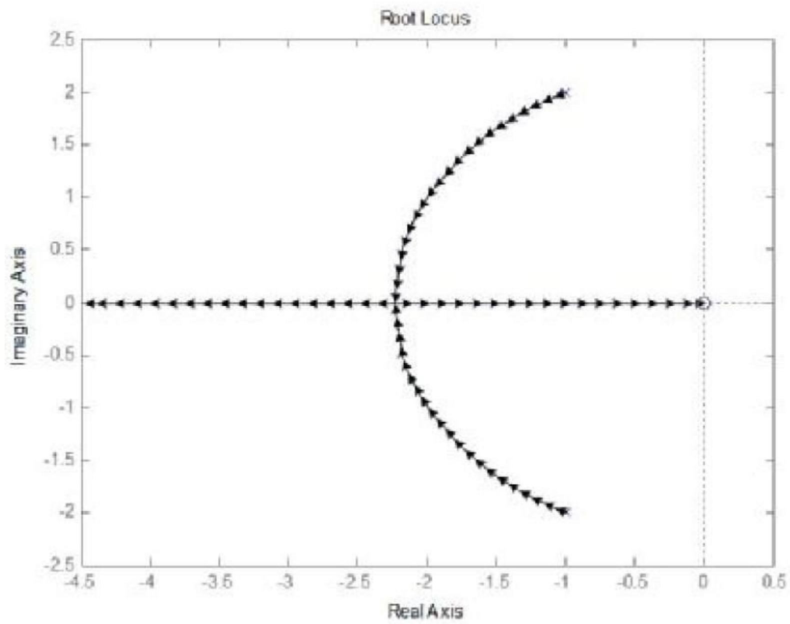
$$\rightarrow\frac{d}{ds}\left(-\frac{s^2+2s+5}{s}\right)=-\left(\frac{(2s+2)s-(s^2+2s+5)}{s^2}\right)=0$$

$$\rightarrow \cancel{2}s^2+\cancel{2s}-\cancel{s^2}-\cancel{2s}-5=0\rightarrow s^2-5=0\rightarrow s=\begin{cases}\sqrt{5}\\ -\sqrt{5}\ \boxed{\checkmark}\end{cases}$$

از آنجا که قطب مختلط نیز داریم، زاویه خروج از قطب نیز باید محاسبه گردد:

$$\begin{cases}\theta+90^\circ-\varphi_1=180^\circ\\ \varphi_1=180^\circ-\varphi_2=180^\circ-\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{1}\right)=180^\circ-63.4^\circ=117^\circ\end{cases}\rightarrow\theta+90^\circ-117^\circ=180^\circ\rightarrow\theta=207^\circ$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود:



◄ **مثال ۴-۳**

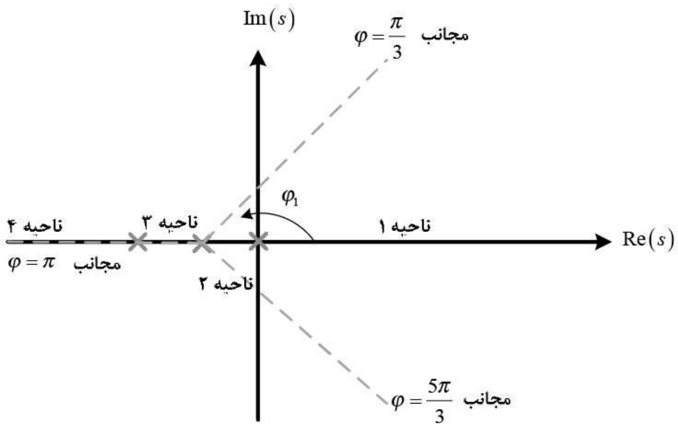
مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K>0$ رسم نمایید.

$$\Delta(s)=1+K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

حل:

برای رسم مکان ریشه ها مراحل ۹ گانه را به ترتیب انجام می دهیم:

$$T(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\rightarrow\begin{cases}p_1=0\\p_2=-1\\p_3=-2\end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =۳ ◄ سه زاویه مجانبی لازم داریم:

$$\varphi=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\left\{\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{k=0},\underbrace{\pi}_{k=1},\underbrace{\frac{5\pi}{3}}_{k=2}\right\},\qquad \sigma=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{0+(-1)+(-2)}{3}=-1$$

سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) ◄ مکان نیست.

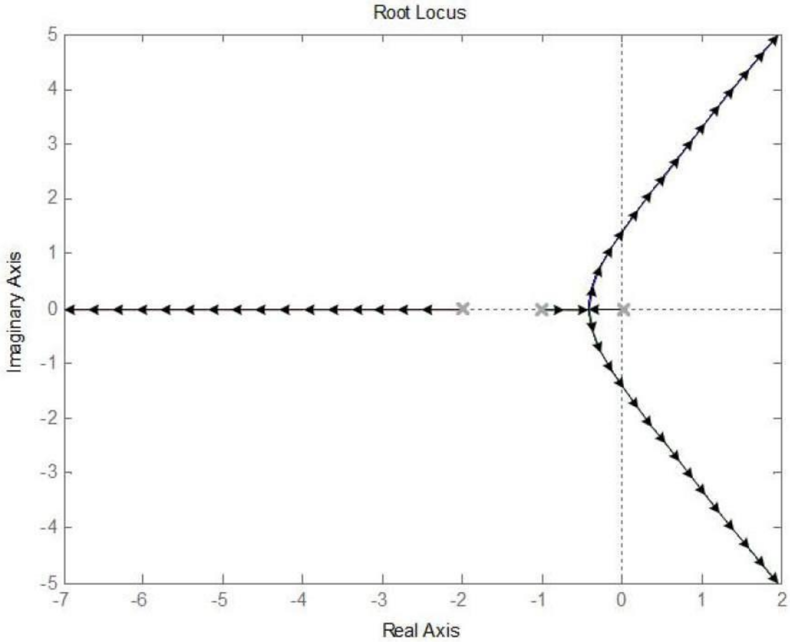
سمت راست ناحیه ۲ یک قطب وجود دارد (فرد) ◀ مکان هست. ◀ بین دو قطب ◀ نقطه شکست داریم.
سمت راست ناحیه ۳ دو قطب وجود دارد (زوج) ◀ مکان نیست.
سمت راست ناحیه ۴ سه قطب وجود دارد (فرد) ◀ مکان هست.

$$T(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\rightarrow -\frac{1}{T(s)}=-s(s+1)(s+2)$$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left(-s(s+1)(s+2)\right)=-\frac{d}{ds}\left(s^3+3s^2+2s\right)=-\left(3s^2+6s+2\right)=0$$

$$\rightarrow 3s^2+6s+2=0\rightarrow s=\begin{cases}-1.58\\ -0.423☑\end{cases}$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود.



۴-۲-۲- قواعد رسم مکان ریشه برای $K<0$

برای $K<0$ رابطه ۴-۱ را می توان بصورت دو شرط کلی بیان نمود:

$$\left|F(s)\right|=\frac{1}{K} \qquad ۹-۴$$

$$\angle F(s)=2k\pi \qquad k=0,1,2,\ldots \qquad ۱۰-۴$$

مراحل رسم مکان ریشه برای $K<0$ تنها در چند مورد با $K>0$ تفاوت دارد:

- مکان ریشه ها از صفر شروع و در قطب پایان می یابد.
- مکان روی محور حقیقی جایی است که سمت راست آن تعداد زوجی قطب یا صفر وجود داشته باشد.
- زاویه مجانبی (φ) بصورت زیر بدست می آیند:

$$\varphi=\frac{2k\pi}{n-m} \qquad ۱۱-۴$$

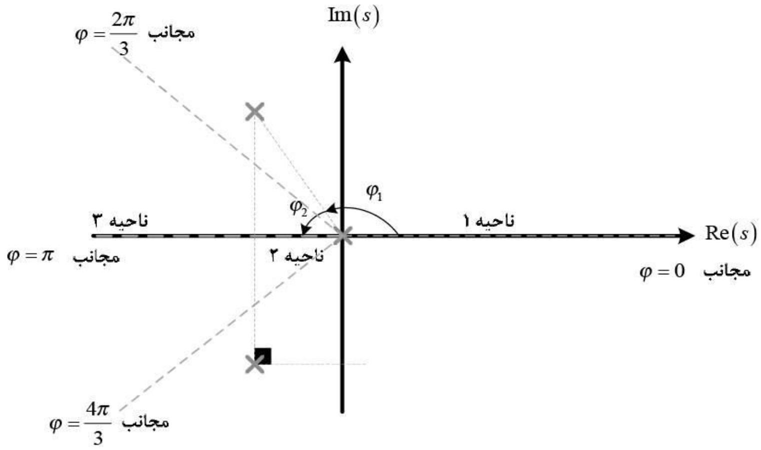
◄ مثال ۴-۴

مکان ریشه های سیستمی با معادله مشخصه زیر را برای $K<0$ رسم نمایید.

$$\Delta(s)=1+K\frac{1}{s\left(s^2+12s+45\right)}$$

حل:

$$T(s)=\frac{1}{s(s^2+12s+45)}\rightarrow\begin{cases}p_1=0\\ s^2+12s+45=0\rightarrow p_{2,3}=\dfrac{-12\pm\sqrt{144-180}}{2}=\dfrac{-12\pm 6j}{2}=-6\pm 3j\end{cases}$$



تعداد صفر بینهایت = تعداد مجانب =۳ ◄ سه زاویه مجانبی لازم داریم:

$$\varphi=\frac{2k\pi}{3}=\left\{\underbrace{0}_{k=0},\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{k=1},\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{k=2}\right\}$$

سمت راست ناحیه ۱ هیچ قطب و صفری وجود ندارد (زوج) ◄ مکان هست.

سمت راست ناحیه ۲ یک قطب وجود دارد (فرد) ◄ مکان نیست.

سمت راست ناحیه ۳ سه قطب وجود دارد (فرد) ◄ مکان نیست.

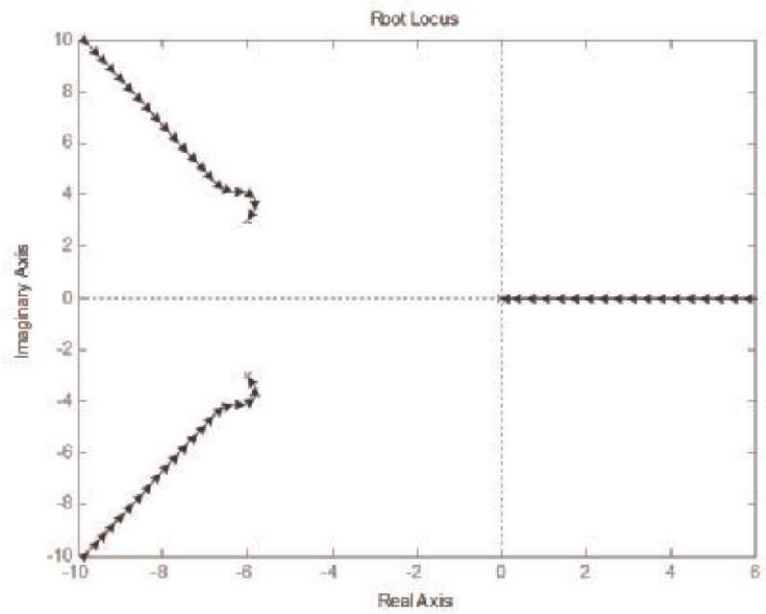
بین دو ناحیه ۲ و ۳، مکان بین دو صفر قرار دارد ◄ نقطه شکست داریم.

از آنجا که قطب مختلط نیز داریم، زاویه خروج از قطب نیز باید محاسبه گردد:

$$\begin{cases}\theta+90°-\varphi_1=0°\\ \varphi_1=180°-\varphi_2=180°-\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{6}\right)=180°-26.52°=153.43°\end{cases}$$

$$\rightarrow\theta+90°-153.43°=0°\rightarrow\theta=63.4°$$

بنابراین مکان ریشه های سیستم مربوطه بصورت زیر خواهد بود:



❖ **نکات:**

- اگر تابع تبدیل سیستم شامل جمله تاخیر e^{-Ts} باشد، برای رسم نمودار مکان ریشه ها از تقریب پاده استفاده می کنیم:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}$$

- افزودن صفر به تابع تبدیل یک سیستم، مکان ریشه ها را به سمت چپ جابجا می کند.
- افزودن قطب به تابع تبدیل یک سیستم، مکان ریشه ها را به سمت راست جابجا می کند.
- محل برخورد نمودار مکان ریشه ها با محور موهومی، بهره پایداری مرزی را مشخص می کند. مقدار این بهره را می‌توان از جدول روث – هورویتز محاسبه نمود.
- جهت فلش ها در نمودار مکان ریشه جهت افزایش K را نشان می دهد.
- اگر پارامتر متغیر در تابع تبدیل بهره نباشد، باید معادله مشخصه را به فرم $1+kF(s)=0$ مرتب نموده و سپس مکان ریشه ها را رسم نماییم:

$$\Delta(s)=1+\frac{1}{(s+k)(s+1)}=0 \rightarrow (s+k)(s+1)+1=0 \rightarrow s^2+s+ks+k+1=0$$

$$\rightarrow s^2+s+1+k(s+1)=0 \rightarrow 1+k\frac{(s+1)}{s^2+s+1}=0$$

◂ مثال ۴-۵

محدوده پایداری سیستم را به ازای تغییرات پارامتر K مشخص نمایید.

$$\Delta(s)=1+\frac{2s+K}{s^2(s+3)}$$

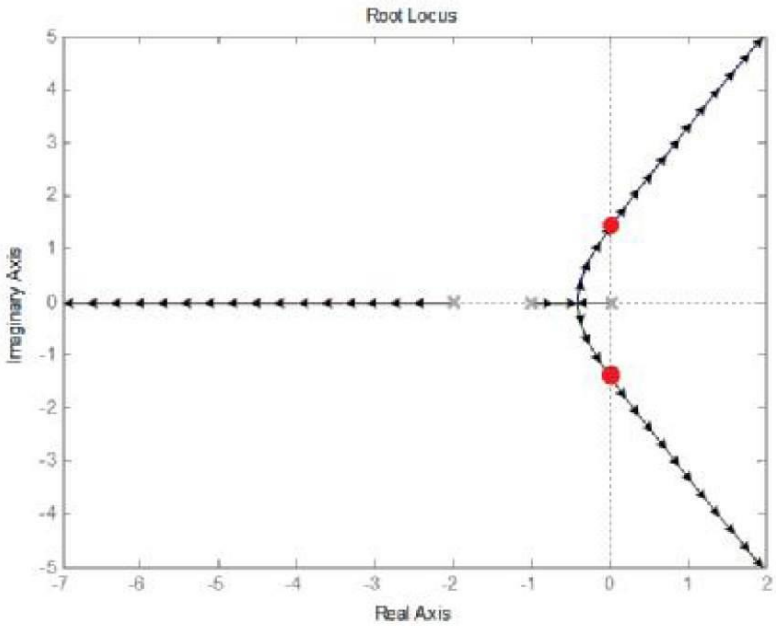
حل:

در این مثال پارامتر K بهره سیستم نمی باشد. بنابراین ابتدا باید معادله مشخصه را به فرم استاندارد تبدیل نماییم:

$$\Delta(s)=1+\frac{2s+K}{s^2(s+3)}=0\rightarrow\Delta(s)=s^2(s+3)+2s+K=0\rightarrow\Delta(s)=s^3+3s^2+2s+K=0$$

$$\rightarrow\Delta(s)=s\left(s^2+3s+2\right)+K=0\rightarrow\Delta(s)=1+K\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=0$$

مکان ریشه های این سیستم در مثال ۴-۳ رسم شده است. در اینجا فقط تغییرات K را مورد بررسی قرار می دهیم.



محل برخورد نمودار مکان ریشه ها با محور موهومی که در شکل فوق مشخص شده اند، مرز پایداری سیستم را نشان می دهد. مقدار بهره در مرز پایداری با استفاده از جدول روث –هورویتز مشخص می شود:

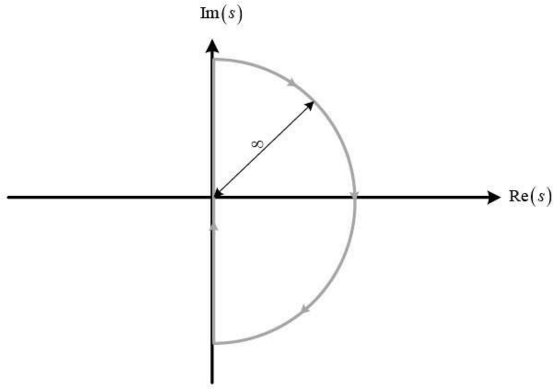
$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s & \dfrac{6-K}{3} & 0 \\ 1 & K & 0 \end{array} \rightarrow 6-K=0\rightarrow K=6$$

جهت فلش ها در نمودار مکان ریشه جهت افزایش K را نشان می دهد. بنابراین به ازای $K<6$ سیستم پایدار خواهد بود.
به ازای $K=6$ سیستم پایدار مرزی خواهد بود. ریشه های متناظر با این بهره از حل معادله کمکی سطر قبل بدست می آید:

$$3s^2+K=3s^2+6=0\rightarrow s=\pm\sqrt{2}j$$

۴-۳-بررسی پایداری به روش دیاگرام نایکوئیست:

در روش مکان ریشه ها، برای بررسی پایداری سیستم های دارای تاخیر، مجبور به استفاده از تقریب پاده بودیم که لزوماً تقریب مناسبی هم نیست. روش معیار پایداری نایکوئیست یک روش نیمه ترسیمی است که برای بررسی پایداری سیستم های تاخیردار مناسب می باشد. اما این روش مکان و محل ریشه ها را تعیین نمی کند.
معیار پایداری نایکوئیست، رابطه پاسخ فرکانسی حلقه باز $G(j\omega)H(j\omega)$ با تعداد قطب ناپایدار سیستم حلقه بسته را مشخص می کند. با این روش پایداری مطلق سیستم حلقه بسته را می توان به روش ترسیمی و با توجه به منحنی های پاسخ فرکانسی حلقه باز (منحنی نایکوئیست) تعیین کرد. بدون آنکه نیاز به محاسبه قطب های سیستم حلقه بسته باشد.
برای تحلیل پایداری سیستم های کنترلی، یک مسیر بسته در صفحه s چنان برمی گزینیم که تمام نیم صفحه راست (ناحیه پایداری) را در بر داشته باشد. این مسیر را مسیر نایکوئیست می نامند. (جهت مسیر ساعتگرد است)



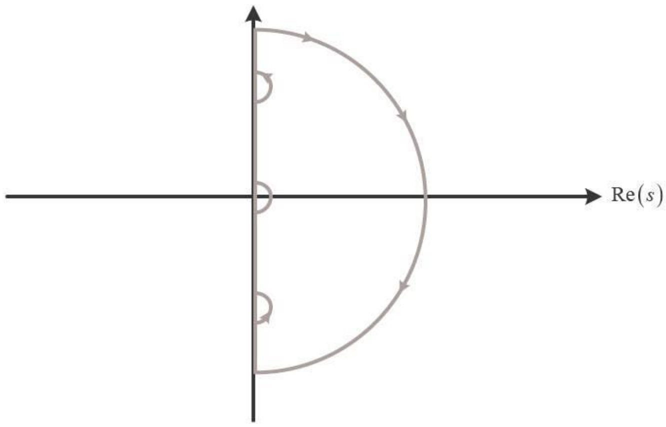
شکل ۴-۲: مسیر نایکوئیست

مسیر نایکوئیست تمام نیم صفحه راست را در بردارد و تمام صفر و قطب های دارای بخش حقیقی مثبت (ناپایدار) در داخل آن قرار دارند. اگر $1+G(s)H(s)$ ریشه ای در نیم صفحه راست نداشته باشد سیستم حلقه بسته در نیم صفحه راست قطب ندارد و سیستم پایدار است. مسیر بسته نایکوئیست را به گونه ای انتخاب می کنیم که از هیچ کدام از صفر و قطب های $1+G(s)H(s)$ عبور نکند. ریشه های $1+G(s)H(s)$ از حل معادله

$$1+G(s)H(s)=0 \rightarrow G(s)H(s)=-1$$

بدست می آیند. بنابراین نقطه $-1+0j$ در منحنی نایکوئیست نقطه بحرانی به حساب می آید.

اگر سیستم حلقه باز $G(s)H(s)$ روی محور موهومی ریشه نداشته باشد، مسیر نایکوئیست را همانند شکل ۴-۲ در نظر می گیریم، اما اگر سیستم حلقه باز $G(s)H(s)$ روی محور موهومی ریشه داشته باشد، از آنجا که می خواهیم تمام قطب‌های موجود در مسیر نایکوئیست پایدار باشند، ریشه های روی محور موهومی را با نیم دایره هایی به شعاع بسیار کوچک $\varepsilon << 1$ از مسیر نایکوئیست جدا می کنیم:



شکل ۴-۳: مسیر نایکوئیست اصلاح شده

❖ **معیار پایداری نایکوئیست:**

اگر مسیر نایکوئیست تمام نیم صفحه راست را در برداشته باشد، تعداد ریشه های $1+G(s)H(s)$ در نیم صفحه راست صفحه s با تعداد دور ساعتگرد منحنی فرکانسی $G(j\omega)H(j\omega)$ حول نقطه بحرانی $-1+0j$ و تعداد قطب های سیستم حلقه باز در نیم صفحه راست صفحه s برابر است:

$$Z = N_R + P$$

که در آن:

Z : تعداد ریشه های $1+G(s)H(s)$ در نیم صفحه راست صفحه s

N_R: تعداد دور ساعتگرد منحنی فرکانسی $G(j\omega)H(j\omega)$ حول نقطه بحرانی $-1+0j$

P: تعداد قطب های سیستم حلقه باز در نیم صفحه راست صفحه s

می باشد. سیستم حلقه بسته زمانی پایدار است که $Z=0$ باشد.

۴-۳-۱- قواعد رسم منحنی نایکوئیست:

برای رسم منحنی نایکوئیست که همان منحنی فرکانسی سیستم حلقه باز می باشد، مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱- ابتدا تابع تبدیل حلقه باز $G(j\omega)H(j\omega)$ را تشکیل می دهیم.

۲- با توجه به قطب های تابع تبدیل حلقه باز مسیر نایکوئیست را رسم می نماییم.

۳- اندازه و زاویه تابع مختلط $G(j\omega)H(j\omega)$ را محاسبه می کنیم.

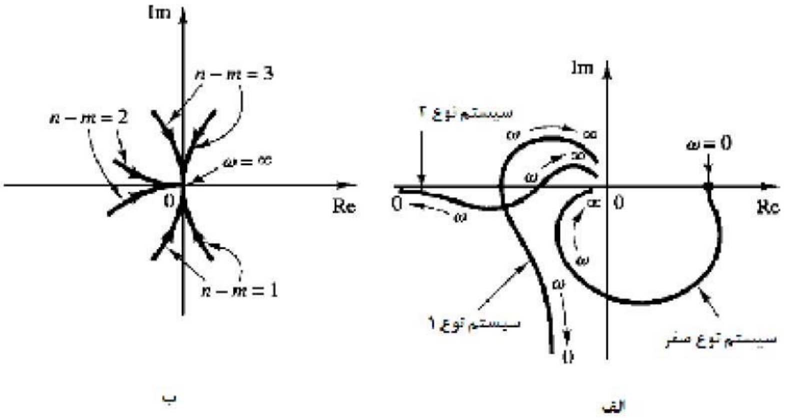
۴- قسمت حقیقی و موهومی تابع مختلط $G(j\omega)H(j\omega)$ را محاسبه می کنیم.

۵- نقاط برخورد با محور حقیقی از حل معادله $\mathrm{Im}\{G(j\omega)H(j\omega)\}=0$ بدست می آیند.

۶- نقاط برخورد با محور موهومی از حل معادله $\mathrm{Re}\{G(j\omega)H(j\omega)\}=0$ بدست می آیند.

۷- اندازه و زاویه $G(j\omega)H(j\omega)$ را برای نقاط $\omega=0^+$، $\omega=+\infty$ و نقاط بدست آمده از مرحله ۵ محاسبه می کنیم.

۸- منحنی نایکوئیست را برای $\omega\in(0^+,+\infty)$ با توجه به مرحله ۷ و شکل های زیر رسم می نماییم:



شکل ۴-۴: منحنی نایکوئیست در (الف) فرکانس پایین (ب) فرکانس بالا

۹- منحنی نایکوئیست نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۱۰- برای رسیدن از $\omega=0^-$ به $\omega=0^+$ برای سیستم نوع N، N نیم دایره در جهت ساعتگرد و به شعاع بی نهایت می‌کشیم.

◄ مثال ۴-۶

دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$GH(s)=\frac{1}{1+s}$$

حل:

سیستم حلقه باز فوق نوع صفر است و تعداد ریشه های ناپایدار آن صفر است بنابراین:

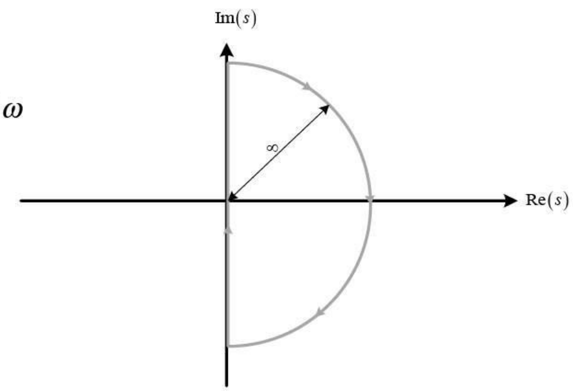
$$s+1=0\rightarrow s=-1\rightarrow P=0$$

اکنون مراحل ۱۰ گانه فوق را به ترتیب انجام می دهیم:

$$GH(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\rightarrow\begin{cases}\left|GH(j\omega)\right|=\dfrac{1}{\left|1+j\omega\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\\ \angle GH(j\omega)=0-\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{1}\right)=-\tan^{-1}\omega\end{cases}$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}\times\frac{1-j\omega}{1-j\omega}=\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}=\underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{\mathrm{Re}\{GH(j\omega)\}}+j\underbrace{\frac{-\omega}{1+\omega^2}}_{\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

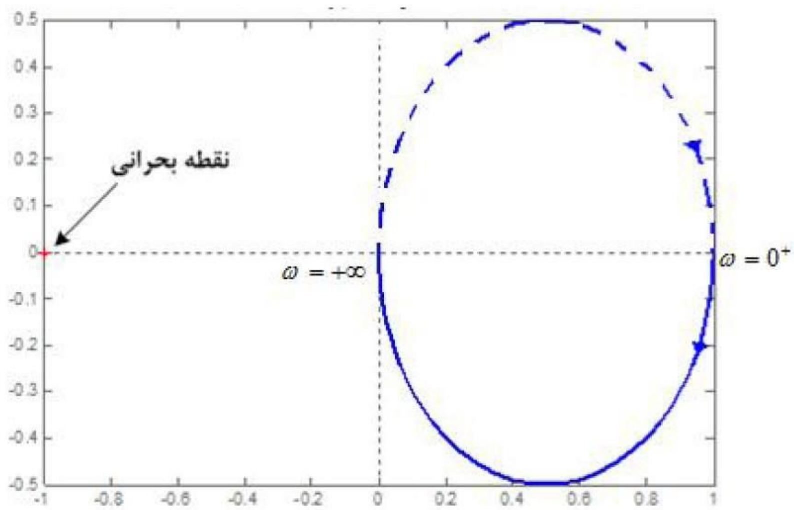
$$\rightarrow\mathrm{Im}\left\{GH(j\omega)\right\}=0\rightarrow\frac{-\omega}{1+\omega^2}=0\rightarrow\omega=0$$



اکنون اندازه و زاویه $GH(j\omega)$ را برای نقاط $\omega=0^+$، $\omega=+\infty$ محاسبه می کنیم:

$$\omega=0^+\rightarrow\begin{cases}\left|GH(j0^+)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+0^2}}=1\\ \angle GH(j0^+)=0-\tan^{-1}\left(\dfrac{0}{1}\right)=0\end{cases},\omega=+\infty\rightarrow\begin{cases}\left|GH(j\infty)\right|=\dfrac{1}{\infty}=0\\ \angle GH(j\infty)=0-\tan^{-1}(\infty)=-90^\circ\end{cases}$$

بنابراین نمودار نایکوئیست بصورت زیر خواهد بود:



با توجه به منحنی نایکوئیست داریم:

$$\begin{cases} P = 0 \\ N_R = 0 \end{cases} \rightarrow z = 0$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است.

مثال ۴-۷

دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

حل:

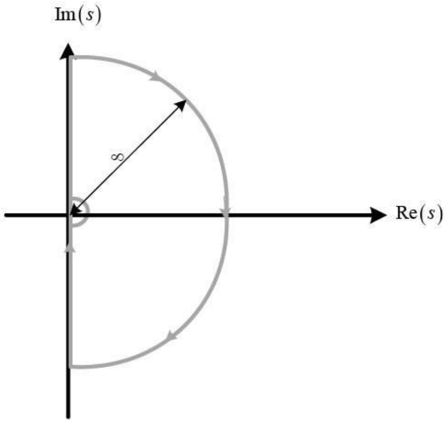
سیستم حلقه باز فوق نوع یک است و تعداد ریشه های ناپایدار آن صفر است بنابراین:

$$s(s+4) = 0 \rightarrow s = 0, -4 \rightarrow P = 0$$

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+4)} \rightarrow \begin{cases} |GH(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega(j\omega+4)|} = \frac{1}{\omega\sqrt{16+\omega^2}} \\ \angle GH(j\omega) = 0 - 90° - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \end{cases}$$

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+4)} = \frac{1}{-\omega^2 + 4j\omega} \times \frac{-\omega^2 - 4j\omega}{-\omega^2 - 4j\omega} = \underbrace{\frac{-\omega^2}{(\omega^4 + 16\omega^2)}}_{\mathrm{Re}\{GH(j\omega)\}} + j\underbrace{\frac{-4\omega}{(\omega^4 + 16\omega^2)}}_{\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

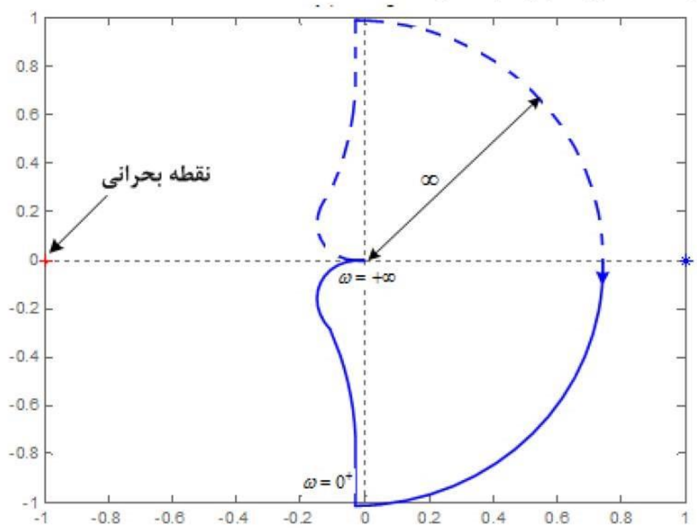
$$\rightarrow \mathrm{Im}\{GH(j\omega)\} = 0 \rightarrow \frac{-4\omega}{(\omega^4 + 16\omega^2)} = 0 \rightarrow \omega = 0$$



اکنون اندازه و زاویه $GH(j\omega)$ را برای نقاط $\omega=0^+$، $\omega=+\infty$ محاسبه می کنیم:

$$\omega=0^+ \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\left|j0^+\left(j0^+ + 4\right)\right|} = \infty \\ \angle GH(j\omega) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1} 0 = -90^\circ \end{cases} \quad ,\omega=+\infty \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\infty)\right| = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \angle GH(j\infty) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1}(\infty) = -180^\circ \end{cases}$$

سیستم نوع یک می باشد. بنابراین برای رسیدن از $\omega=0^-$ به $\omega=0^+$، یک نیم دایره در جهت ساعتگرد و به شعاع بی نهایت می‌کشیم. بنابراین نمودار نایکوئیست بصورت زیر خواهد بود:



با توجه به منحنی نایکوئیست داریم:

$$\begin{cases} P=0 \\ N_R=0 \end{cases} \rightarrow z=0$$

بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است.

◄ مثال ۴-۸

دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.

$$GH(s)=\frac{1}{s^2(1+2s)}$$

حل:

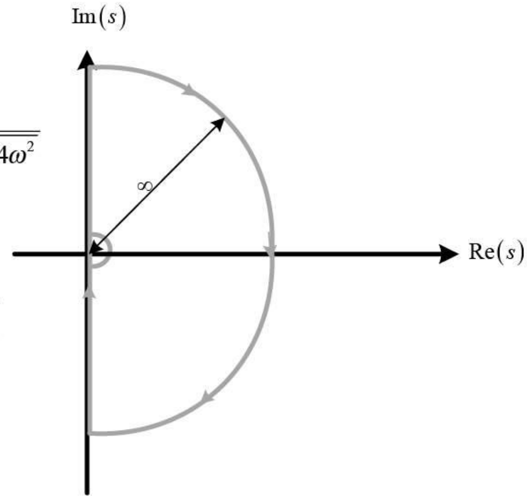
سیستم حلقه باز فوق نوع دو است و تعداد ریشه های ناپایدار آن صفر است بنابراین:

$$s^2(1+2s)=0 \rightarrow s=0,0,-0.5 \rightarrow P=0$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2(2j\omega+1)} \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\left|(j\omega)^2(2j\omega+1)\right|} = \dfrac{1}{\omega^2\sqrt{1+4\omega^2}} \\ \angle GH(j\omega) = 0-180^\circ - \tan^{-1}\left(\dfrac{2\omega}{1}\right) \end{cases}$$

$$GH(j\omega)=\frac{1}{\underbrace{(j\omega)^2}_{-\omega^2}(2j\omega+1)} \times \frac{-2j\omega+1}{-2j\omega+1} = \underbrace{\frac{-1}{\omega^2}\frac{1}{(1+4\omega^2)}}_{\mathrm{Re}\{GH(j\omega)\}} + j\underbrace{\frac{-1}{\omega}\times\frac{-2}{(1+4\omega^2)}}_{\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

$$\rightarrow \mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}=0 \rightarrow \frac{2}{\omega(1+4\omega^2)} \neq 0$$

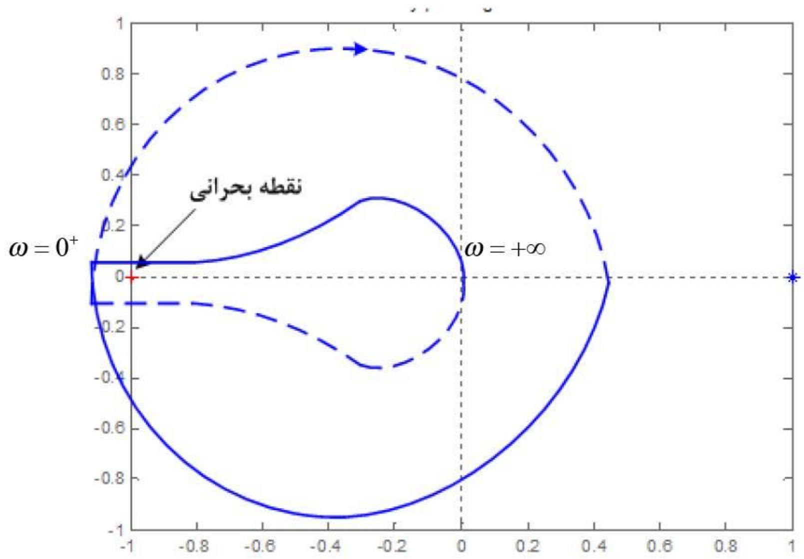


اکنون اندازه و زاویه $GH(j\omega)$ را برای نقاط $\omega=0^+$، $\omega=+\infty$ محاسبه می کنیم:

$$\omega=0^+ \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\omega)\right| = \dfrac{1}{0} = \infty \\ \angle GH(j\omega) = 0-180^\circ-\tan^{-1}(0) = -180^\circ \end{cases} \quad , \omega=+\infty \rightarrow \begin{cases} \left|GH(j\infty)\right| = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \angle GH(j\omega) = 0-180^\circ-\tan^{-1}(\infty) = -270^\circ \end{cases}$$

سیستم نوع دو می باشد. بنابراین برای رسیدن از $\omega=0^-$ به $\omega=0^+$، 2 نیم دایره در جهت ساعتگرد و به شعاع بی نهایت می‌کشیم.

بنابراین نمودار نایکوئیست بصورت زیر خواهد بود:



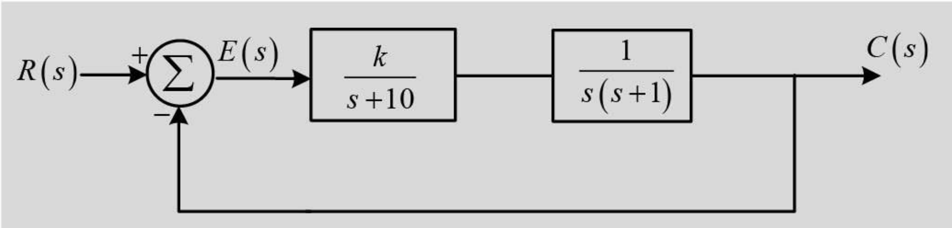
با توجه به منحنی نایکوئیست داریم:

$$\begin{cases} P=0 \\ N_R=2 \end{cases} \rightarrow z=2$$

بنابراین سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

◀ مثال ۴-۹

دیاگرام نایکوییست سیستم حلقه باز زیر را رسم نموده و پایداری حلقه بسته آن را بررسی نمایید.



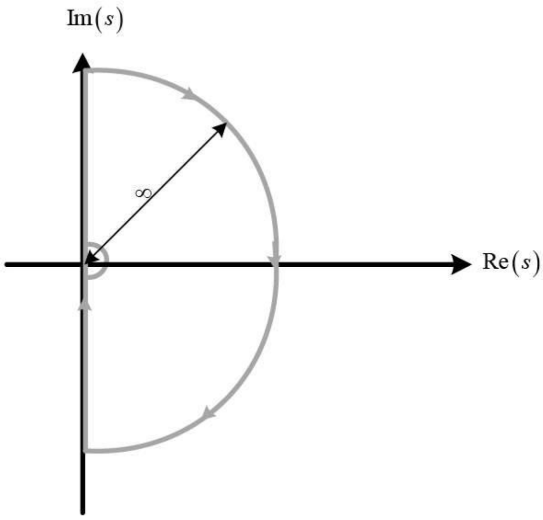
حل:

سیستم حلقه باز فوق نوع یک است و تعداد ریشه های ناپایدار آن صفر است بنابراین:

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s+10}\times\frac{1}{s(s+1)}\rightarrow s(s+1)(s+10)=0\rightarrow\begin{cases}p_1=0\\ p_2=-1 & \rightarrow P=0\\ p_3=-10\end{cases}$$

$$GH(j\omega)=\frac{k}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+10)}=\frac{k}{-j\omega^3-11\omega^2+10j\omega}$$

$$\rightarrow\begin{cases}|GH(j\omega)|=\dfrac{k}{|(j\omega)j\omega(s+1)(j\omega+10)|}=\dfrac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{100+\omega^2}}\\ \angle GH(j\omega)=0-90^\circ-\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{1}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{10}\right)\end{cases}$$



$$GH(j\omega)=\frac{k}{-11\omega^2+j(-\omega^3+10\omega)}\times\frac{-11\omega^2-j(-\omega^3+10\omega)}{-11\omega^2-j(-\omega^3+10\omega)}$$

$$=k\left(\underbrace{\frac{-11\omega^2}{|-j\omega^3-11\omega^2+10j\omega|}}_{\mathrm{Re}\{GH(j\omega)\}}+j\underbrace{\frac{\omega^3-10\omega}{|-j\omega^3-11\omega^2+10j\omega|}}_{\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}}\right)$$

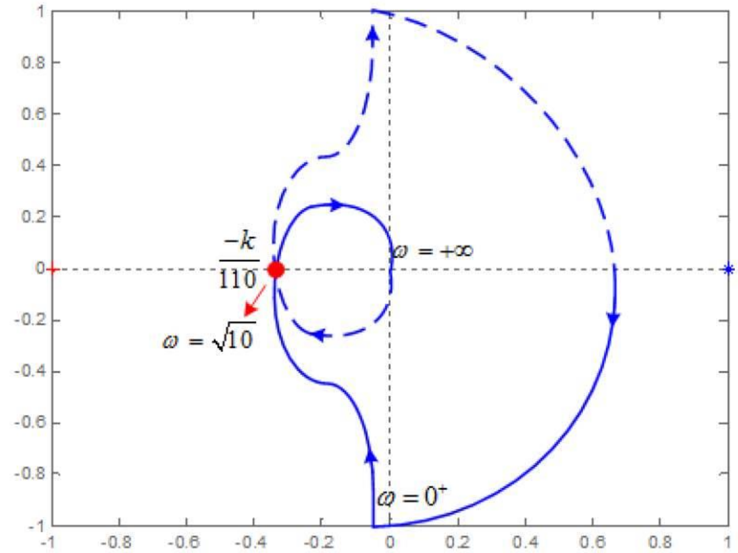
$$\rightarrow\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}=0\rightarrow\omega^3-10\omega=0\rightarrow\omega(\omega^2-10)=0\rightarrow\begin{cases}\omega=0\\ \omega=+\sqrt{10}\ \boxtimes\\ \omega=-\sqrt{10}\end{cases}$$

اکنون اندازه و زاویه $GH(j\omega)$ را برای نقاط $\omega=0^+$، $\omega=+\infty$ محاسبه می کنیم:

$$\omega=0^+\rightarrow\begin{cases}|GH(j\omega)|=\dfrac{k}{0}=\infty\\ \angle GH(j\omega)=0-90^\circ-2\tan^{-1}(0)=-90^\circ\end{cases}\quad,\omega=+\infty\rightarrow\begin{cases}|GH(j\infty)|=\dfrac{k}{\infty}=0\\ \angle GH(j\omega)=0-90^\circ-2\tan^{-1}(\infty)=-270^\circ\end{cases}$$

$$\omega=\sqrt{10}\rightarrow\begin{cases}|GH(j\omega)|=\dfrac{k}{\underbrace{\sqrt{10}\sqrt{1+10}}_{\sqrt{110}}\sqrt{110}}=\dfrac{k}{110}\\ \angle GH(j\omega)=0-90^\circ-\tan^{-1}(\sqrt{10})-\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)=-180^\circ\end{cases}$$

سیستم نوع یک می باشد. بنابراین برای رسیدن از $\omega=0^-$ به $\omega=0^+$، 2 نیم دایره در جهت ساعتگرد و به شعاع بی نهایت می‌کشیم و نمودار نایکوئیست بصورت زیر خواهد بود:



چون $P=0$ است، با توجه به منحنی نایکوئیست اگر بخواهیم $Z=0$ باشد، باید $N_R=0$ باشد. بنابراین نقطه $\frac{-k}{110}$ باید جایی باشد که تعداد دورها نقطه -1 را در برنگیرد:

$$\frac{-k}{110} > -1 \rightarrow \frac{k}{110} < 1 \rightarrow k < 110$$

۴-۳-۲- محاسبه پارامترهای اصلی پایداری در حوزه فرکانس با استفاده از منحنی نایکوئیست:

دو پارامتر اصلی حد بهره[1] و حد فاز[2] که اساس طراحی های حوزه فرکانسی سیستم های کنترلی می باشند را می توان با استفاده از منحنی نایکوئیست بدست آورد. در این بخش با این دو پارامتر و نحوه محاسبه آنها آشنا می شویم:

فرکانس قطع فاز: فرکانس قطع فاز (ω_C)، فرکانسی است که در آن زاویه تابع تبدیل برابر $180°$ گردد. برای محاسبه فرکانس قطع فاز می توان نقطه ای که در آن بخش موهومی $GH(j\omega)$ صفر می شود را نیز محاسبه نمود.

حد بهره: حد بهره بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$GM = 20\log\frac{1}{|GH(j\omega_C)|} \qquad ۱۲-۴$$

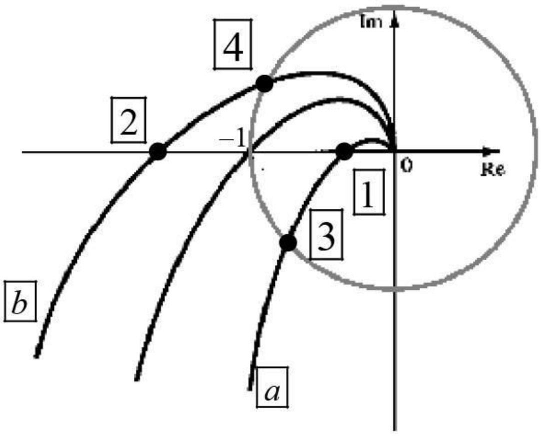
فرکانس قطع بهره فرکانس قطع بهره (ω_g)، فرکانسی است که در آن اندازه تابع تبدیل برابر 1 گردد.

حد فاز حد فاز بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$PM = \angle GH(j\omega_g) \pm 180 \qquad ۱۳-۴$$

به شکل ۴-۵ توجه کنید. برای نمودار $\boxed{a}$، نقاط $\boxed{1}$ و $\boxed{3}$ به ترتیب برابر ω_C و ω_g می باشد. برای نمودار $\boxed{b}$، نقاط $\boxed{2}$ و $\boxed{4}$ به ترتیب برابر ω_C و ω_g می باشد.

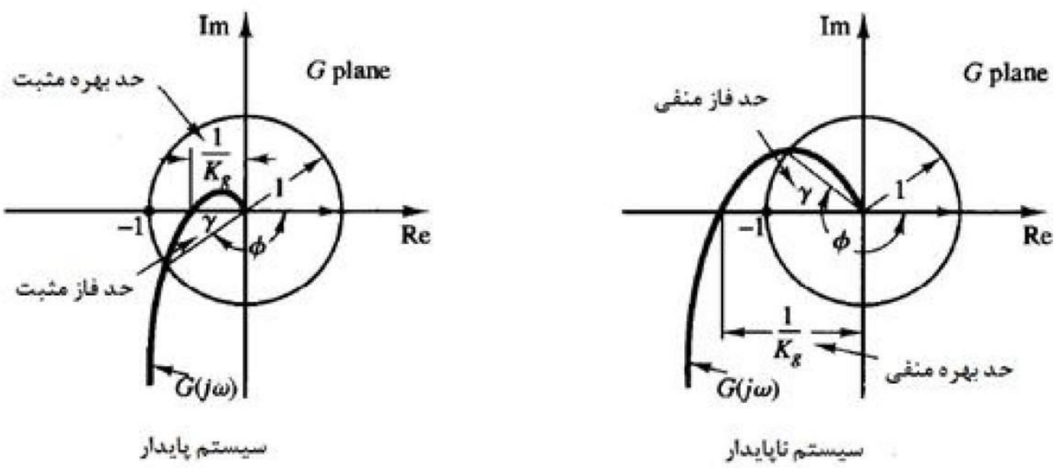
---
[1] Gain Margin
[2] Phase Margin



شکل ۴-۵ مفاهیم حد فاز و حد بهره

برای پایداری یک سیستم مقادیر حد فاز و حد بهره هر دو باید **مثبت** باشند. حتی اگر یکی از این مقادیر منفی باشند سیستم ناپایدار خواهد بود.

برای درک بهتر این موضوع به شکل زیر توجه کنید.



شکل ۴-۶ نحوه تشخیص علامت جبری حدفاز و حدبهره از روی دیاگرام نایکوییست

◄ مثال ۴-۱۰

با استفاده از تعاریف حد فاز و حد بهره پایداری سیستم زیر را تعیین کنید:

$$GH(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

حل:

برای محاسبه حد بهره، ابتدا فرکانس قطع فاز را محاسبه می کنیم:

$$GH(j\omega)=\frac{1}{\underbrace{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}_{-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega}}=\frac{k}{-3\omega^2+j\omega(2-\omega^2)}\times\frac{-3\omega^2-j\omega(2-\omega^2)}{-3\omega^2-j\omega(2-\omega^2)}$$

$$=\underbrace{\frac{-3\omega^2}{\left|-3\omega^2-j\omega(2-\omega^2)\right|}}_{\operatorname{Re}\{GH(j\omega)\}}+j\underbrace{\frac{-\omega(2-\omega^2)}{\left|-3\omega^2-j\omega(2-\omega^2)\right|}}_{\operatorname{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

$$\to \operatorname{Im}\{GH(j\omega)\}=0\to\omega(2-\omega^2)=0\to\begin{cases}\omega=0\\ \omega=\sqrt{2}\ \boxtimes\to\omega_C=\sqrt{2}\\ \omega=-\sqrt{2}\end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه ۴-۱۲ حد بهره را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases}GM=20\log\dfrac{1}{\left|GH(j\sqrt{2})\right|}\\ \left|GH(j\sqrt{2})\right|=\dfrac{1}{\omega_C\sqrt{1+(\omega_C)^2}\sqrt{4+(\omega_C)^2}}\Bigg|_{\omega_C=\sqrt{2}}=\dfrac{1}{6}\end{cases}\to GM=20\log 6=15.56^{dB}$$

برای محاسبه حد فاز، ابتدا فرکانس قطع بهره را محاسبه می کنیم:

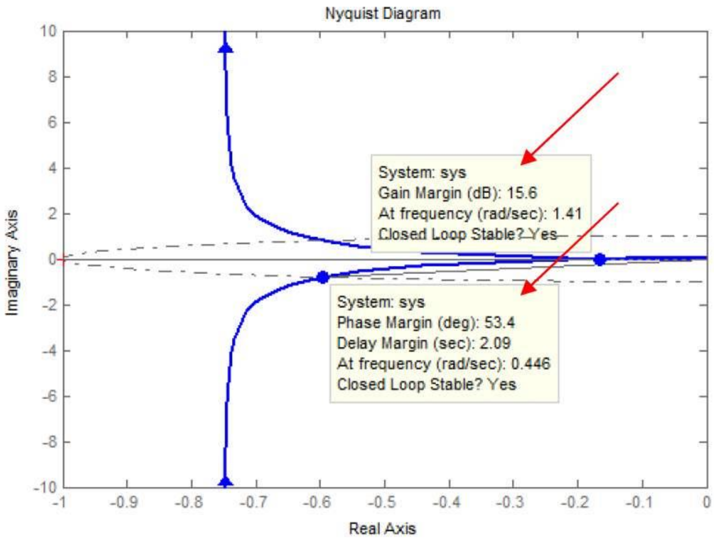
$$\left|GH(j\omega_g)\right|=1\to\frac{1}{\omega_g\sqrt{1+(\omega_g)^2}\sqrt{4+(\omega_g)^2}}=1\to\omega_g\sqrt{1+(\omega_g)^2}\sqrt{4+(\omega_g)^2}=1$$

$$\to\omega_g^2\left(1+\omega_g^2\right)\left(4+\omega_g^2\right)=0\to\omega_g=0.446$$

اکنون با استفاده از رابطه ۴-۱۳ حد فاز را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases}PM=\angle GH(j\omega_g)\pm180\\ \angle GH(j0.446)=0-90^\circ-\tan^{-1}\left(\dfrac{0.446}{1}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{0.446}{2}\right)=-126.6^\circ\end{cases}\to PM=180^\circ-126.6^\circ=53.4^\circ$$

حد فاز و حدبهره هر دو مثبت هستند بنابراین سیستم پایدار است.



◄ مثال ۴-۱۱

برای سیستم زیر، مقدار k را به گونه ای تعیین کنید که

الف) $GM = 6^{dB}$

ب) $PM = 45°$

$$GH(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+10)}$$

حل:

الف) برای محاسبه حد بهره، ابتدا فرکانس قطع فاز را محاسبه می کنیم:

$$GH(j\omega) = \frac{1}{\underbrace{j\omega(j\omega+2)(j\omega+10)}_{-j\omega^3-12\omega^2+20j\omega}} = \frac{k}{-12\omega^2 + j\omega(20-\omega^2)} \times \frac{-12\omega^2 - j\omega(20-\omega^2)}{-12\omega^2 - j\omega(20-\omega^2)}$$

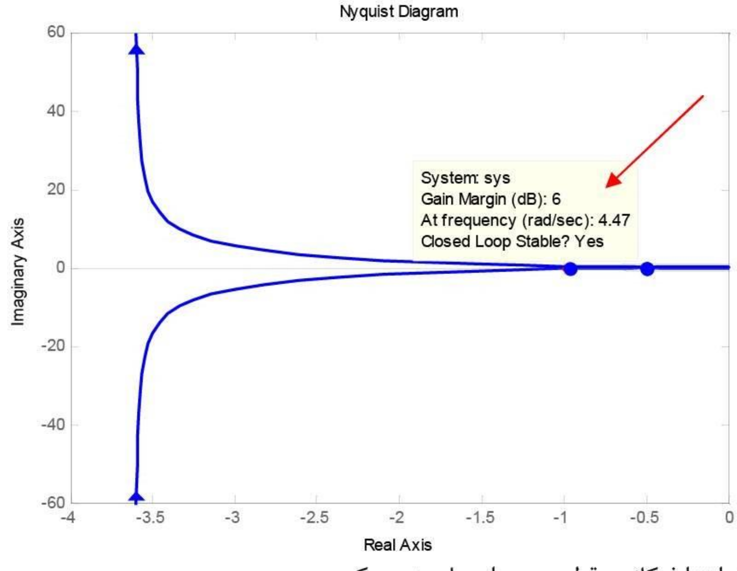
$$= \underbrace{\frac{-12\omega^2}{\left|-12\omega^2 + j\omega(20-\omega^2)\right|}}_{\mathrm{Re}\{GH(j\omega)\}} + j\underbrace{\frac{-\omega(20-\omega^2)}{\left|-12\omega^2 + j\omega(20-\omega^2)\right|}}_{\mathrm{Im}\{GH(j\omega)\}}$$

$$\rightarrow \mathrm{Im}\{GH(j\omega)\} = 0 \rightarrow \omega(20-\omega^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{20} \ \boxtimes \rightarrow \omega_C = \sqrt{20} \\ \omega = -\sqrt{20} \end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه ۴-۱۲ حد بهره را محاسبه می کنیم:

$$\left|GH(j\sqrt{20})\right| = \frac{k}{\omega_C\sqrt{4+(\omega_C)^2}\sqrt{100+(\omega_C)^2}}\Bigg|_{\omega_C=\sqrt{20}} = \frac{k}{240} \rightarrow GM = 20\log\frac{1}{\frac{k}{240}} = 6^{dB}$$

$$\rightarrow \log\frac{240}{k} = 0.3 \rightarrow 10^{\log\frac{240}{k}} = 10^{0.3} \rightarrow \frac{240}{k} = 1.9953 \rightarrow k \approx 120.28$$

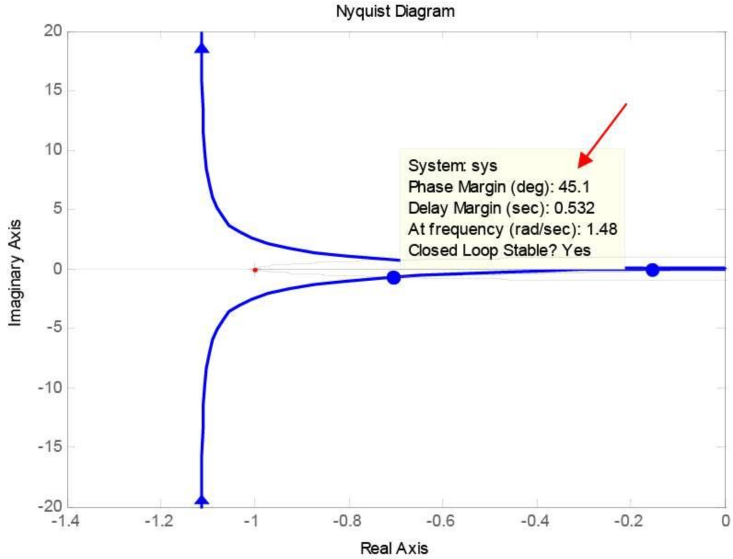


ب) برای محاسبه حد فاز، ابتدا فرکانس قطع بهره را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} \angle GH\left(j\omega_g\right) = 0 - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_g}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega_g}{10}\right) \\ PM = \angle GH\left(j\omega_g\right) + 180^\circ = 45^\circ \rightarrow \angle GH\left(j\omega_g\right) = -135^\circ \end{cases} \rightarrow \omega_g = 1.48$$

$$\left|GH(j\omega_g)\right| = 1 \rightarrow \frac{k}{\omega_g\sqrt{4+\left(\omega_g\right)^2}\sqrt{100+\left(\omega_g\right)^2}} = 1 \rightarrow \omega_g\sqrt{4+\left(\omega_g\right)^2}\sqrt{100+\left(\omega_g\right)^2} = k$$

$$\rightarrow k = 1.48\times\sqrt{4+\left(1.48\right)^2}\sqrt{100+\left(1.48\right)^2} \rightarrow k \approx 37.2$$



۴-۴- بررسی پایداری به روش نمودار های بودی:

در روش ترسیمی منحنی های بودی[1]، دو تابع اندازه و فاز تابع تبدیل حلقه باز $GH\left(j\omega\right)$ بصورت لگاریتمی در نمودارهایی جداگانه بر حسب لگاریتم فرکانس رسم می شوند. بیان استاندارد لگاریتم اندازه $GH\left(j\omega\right)$، $20\log\left|GH\left(j\omega\right)\right|$ است که بر حسب دسیبل بیان می گردد.

۴-۴-۱- قواعد رسم نمودارهای بودی:

فرم کلی تابع تبدیل حلقه باز را بصورت

$$GH\left(s\right) = \frac{k\left(1+T_{z_1}s\right)\left(1+T_{z_2}s\right)\ldots\left(1+T_{z_m}s\right)}{s^N\left(1+T_{p_1}s\right)\left(1+T_{p_2}s\right)\ldots\left(1+T_{p_n}s\right)}e^{-T_d s} \qquad ۱۴-۴$$

در نظر بگیرید.

برای ترسیم نمودارهای بودی، تک تک عوامل تشکیل دهنده تابع تبدیل حلقه باز را به ترتیب معرفی نموده و سپس نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز را بصورت جداگانه برای آنها رسم می نماییم. از آنجا که در قواعد لگاریتمی، ضرب به جمع

[1] Bode

تبدیل می گردد[۱]، نمودار های لگاریتمی ضرب این عوامل (یعنی خود تابع تبدیل حلقه باز) برابر مجموع نمودار های لگاریتمی تک تک این عوامل خواهد بود. عوامل مهم تشکیل دهنده تابع تبدیل حلقه باز با توجه به ۴-۱۴ عبارتند از:

۱- بهره ثابت
۲- صفر و قطب حقیقی
۳- صفر و قطب مزدوج مختلط
۴- صفر و قطب در مبدأ
۵- تأخیر

اکنون تک تک این عوامل را به ترتیب معرفی نموده و سپس نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز را بصورت جداگانه برای آنها رسم می نماییم.

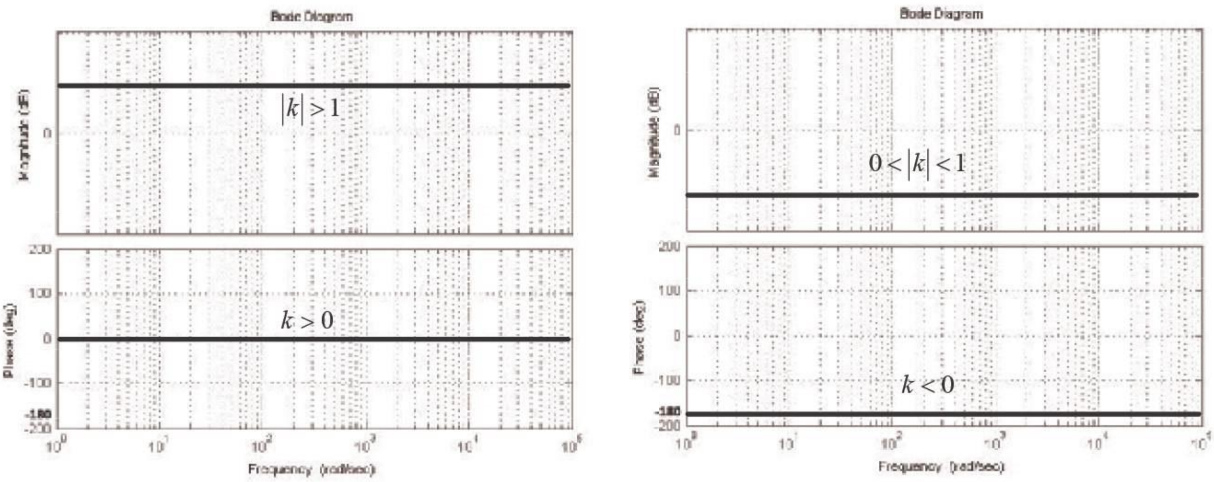
توجه کنید که برای رسم نمودارهای بودی حتما باید تابع تبدیل به فرم ۴-۱۴ تبدیل شود.

۱- بهره ثابت:

برای هر عدد ثابتی که در تابع تبدیل ضرب شود داریم:

$$\begin{cases} 20\log|k|>0 & |k|>1 \\ 20\log|k|<0 & 0<|k|<1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 0 & k>0 \\ \pi & k<0 \end{cases}$$

بنابراین نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز آن بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۴-۷ نمودارهای بودی برای بهره k

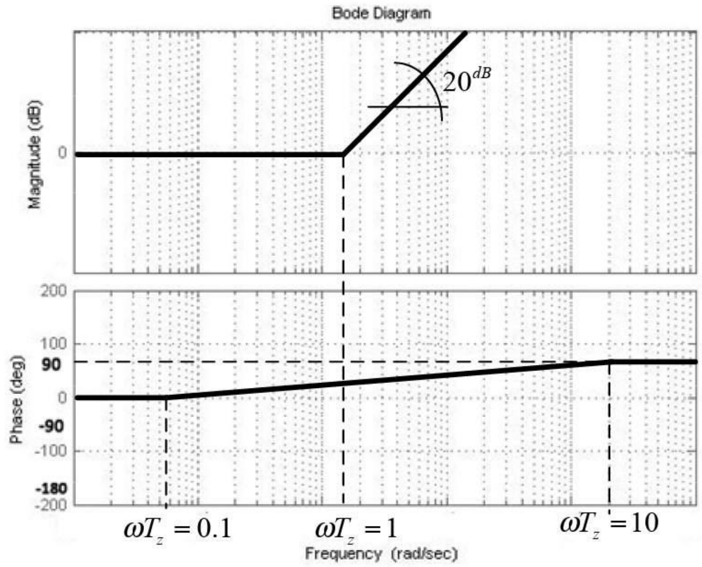
۲- قطب و صفر حقیقی:

برای صفر حقیقی به فرم $1+j\omega T_z$ داریم:

$$20\log|1+j\omega T_z| = \begin{cases} 20\log|1+j\omega T_z| \approx 20\log 1 = 0 & \omega T_z << 1 \\ 20\log|1+j\omega T_z| \approx 20\log \omega T_z & \omega T_z >> 1 \end{cases}$$

[۱] می دانیم که $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$

فرکانسی که در آن $\omega T = 1$ می شود T را فرکانس گوشه[1] گویند. بنابراین نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز آن بصورت زیر خواهد بود:

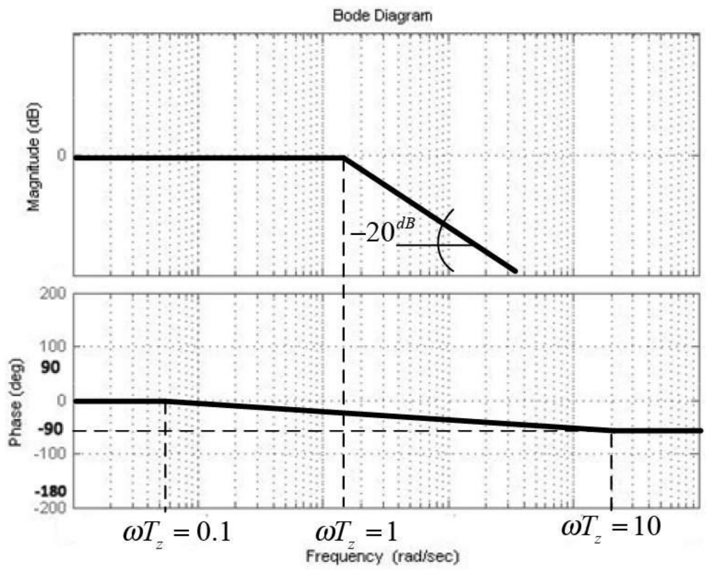


شکل ۴-۸ نمودارهای بودی برای صفر $1 + j\omega T_z$

برای قطب حقیقی به فرم $1 + j\omega T_p$ داریم:

$$20\log\left|1+j\omega T_z\right| = \begin{cases} 20\log\left|\dfrac{1}{1+j\omega T_p}\right| \square\ 20\log 1 = 0 & \omega T_z << 1 \\ 20\log\left|\dfrac{1}{1+j\omega T_p}\right| = -20\log\left|1+j\omega T_p\right| \square\ -20\log\omega T_p & \omega T_z >> 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز آن بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۴-۹ نمودارهای بودی برای قطب $1 + j\omega T_p$

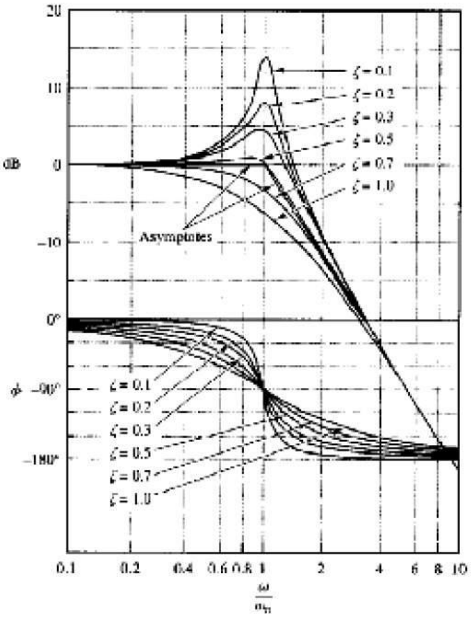
[1] Cut-Off Frequency

۳- قطب و صفر مختلط مزدوج:

از آنجا که عامل مرتبه دوم بیشتر در مخرج تابع تبدیل ظاهر می شود، تنها به بررسی قطب مختلط می پردازیم:

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \rightarrow \omega_n^2\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\left(\frac{s}{\omega_n^2}\right)\right)=0$$

بر اساس اینکه مقادیر $\omega_n\,,\zeta$ چه مقداری باشند، نمودار اندازه و زاویه یکی از نمودارهای زیر خواهد بود:



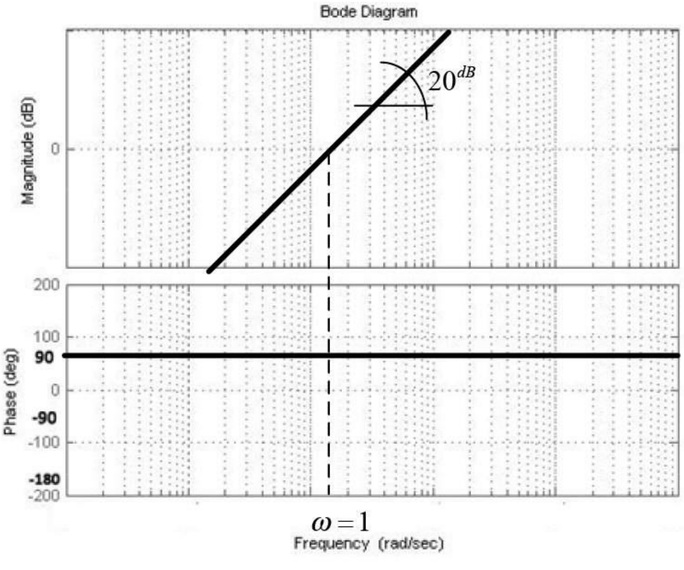
شکل ۴-۱۰ نمودارهای بودی برای قطب مزدوج مختلط

۴- قطب یا صفر در مبدأ:

برای صفر در مبدأ داریم:

$$\left(j\omega\right)^N \rightarrow \begin{cases} 20\log\left|\left(j\omega\right)^N\right| = 20N\log\omega \\ \angle\left(j\omega\right)^N = N\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

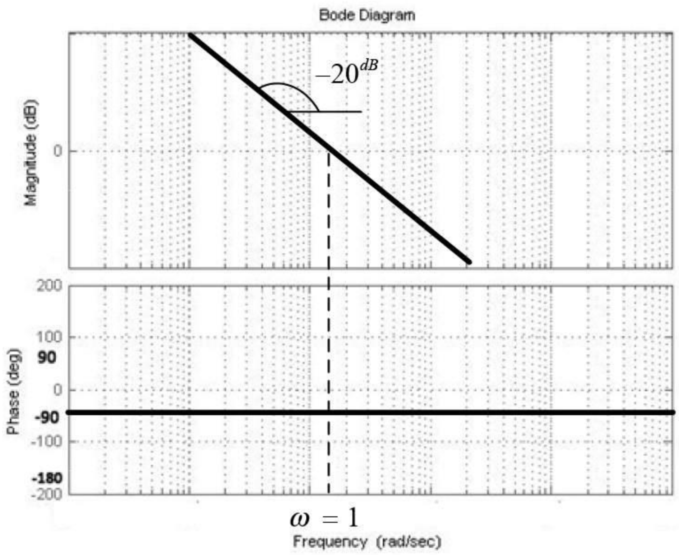
بنابراین بطور مثال برای $N=1$ نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز آن بصورت زیر خواهد بود:



برای قطب در مبدأ داریم:

$$(j\omega)^{-N} \to \begin{cases} 20\log\left|(j\omega)^{-N}\right| = -20N\log\omega \\ \angle (j\omega)^{-N} = -N\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین بطور مثال برای $N=1$ نمودارهای لگاریتمی اندازه و فاز آن بصورت زیر خواهد بود:



۵- عامل تأخیر e^{-Ts} :

اگر تابع تبدیل عامل تأخیر داشته باشد، تنها زاویه فاز را به اندازه $-T\omega$ جابجا می کند.

$$e^{-Tj\omega} \to \begin{cases} \left|e^{-Tj\omega}\right| = 1 \\ \angle e^{-Tj\omega} = -T\omega \end{cases}$$

اکنون با مثال رسم این نمودارها را آموزش می دهیم:

◀ مثال ۴-۱۱

نمودار های بودی سیستم زیر را رسم کنید.

$$GH(s) = \frac{20s}{(s+1)(s+10)}$$

حل:

ابتدا تابع تبدیل را به فرم استاندارد نمودارهای بودی تبدیل می کنیم:

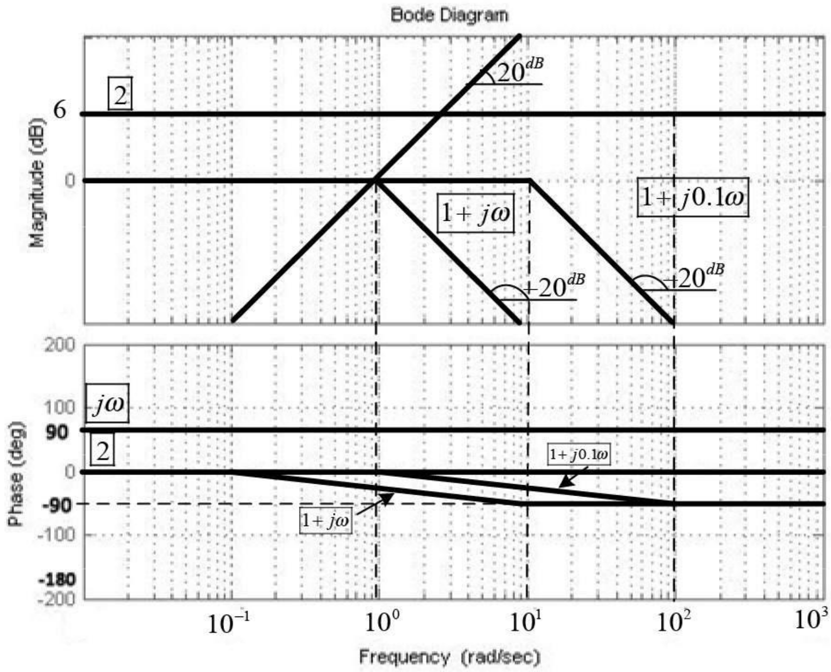
$$GH(s) = \frac{20s}{(s+1)(s+10)} = \frac{2\cancel{0}s}{\cancel{10}(1+s)(1+0.1s)} = \frac{2s}{(1+s)(1+0.1s)}$$

اکنون برای تک تک عوامل تشکیل دهنده این تابع تبدیل، اندازه و فاز را جداگانه محاسبه نموده و رسم می کنیم:

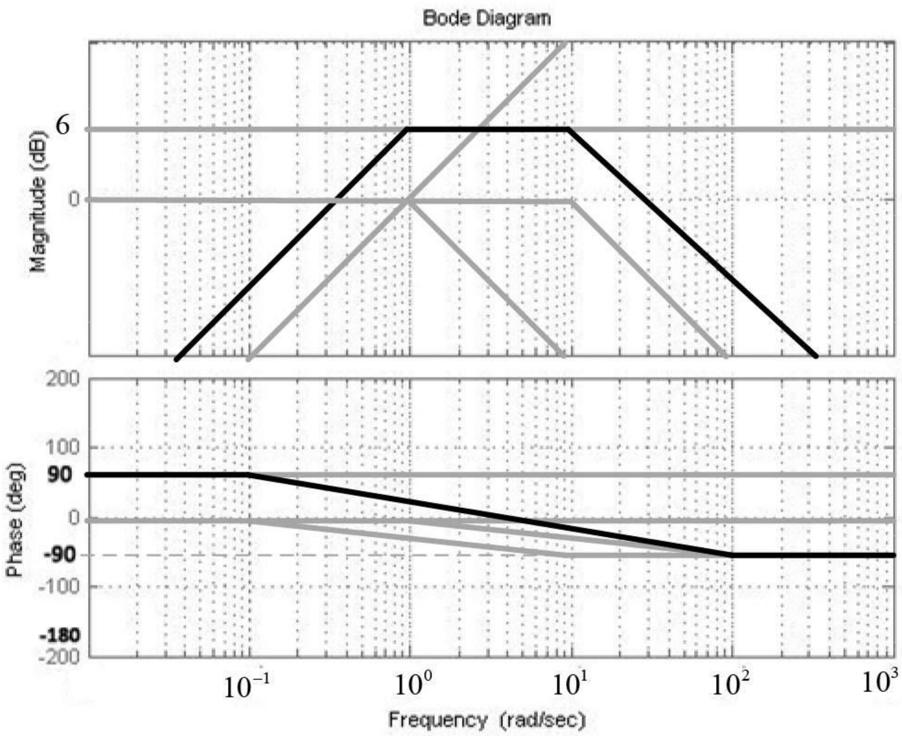
$$GH(s) = \frac{2s}{(1+s)(1+0.1s)} \to \begin{cases} 2 & \text{بهره ثابت} \\ s & \text{صفر در مبدأ} \\ 1+s & \text{قطب ساده} \\ 1+0.1s & \text{قطب ساده} \end{cases}$$

$$2:\begin{cases}20\log 2 = 6^{dB}\\ \angle(2)=0^\circ\end{cases} \quad , \quad j\omega:\begin{cases}20\log|j\omega| = 20\log\omega\\ \angle(j\omega)=90^\circ\end{cases}$$

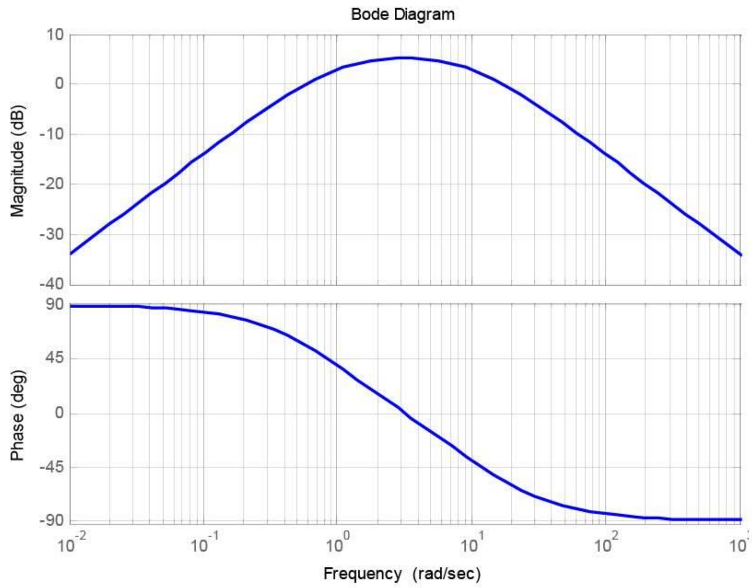
$$1+j\omega : T=1\rightarrow\begin{cases}\omega T=1\rightarrow\omega=1\\ \omega T=0.1\rightarrow\omega=0.1\\ \omega T=10\rightarrow\omega=10\end{cases} \quad , \quad 1+0.1j\omega : T=0.1\rightarrow\begin{cases}\omega T=1\rightarrow\omega=10\\ \omega T=0.1\rightarrow\omega=1\\ \omega T=10\rightarrow\omega=100\end{cases}$$



اکنون این نمودارها را جمع می زنیم:



البته این نمودار تقریبی است و اصل نمودار که توسط نرم افزار متلب می توان رسم نمود بصورت زیر می باشد:



◄ مثال ۴-۱۲

نمودار های بودی سیستم زیر را رسم کنید.

$$GH(s)=\frac{100(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$$

حل:

ابتدا تابع تبدیل را به فرم استاندارد نمودارهای بودی تبدیل می کنیم:

$$GH(s)=\frac{100(s+10)}{s(s+2)(s+5)}=\frac{100\cancel{0}(1+0.1s)}{\cancel{10}s(1+0.5s)(1+0.2s)}=\frac{100(1+0.1s)}{s(1+0.5s)(1+0.2s)}$$

اکنون برای تک تک عوامل تشکیل دهنده این تابع تبدیل، اندازه و فاز را جداگانه محاسبه نموده و رسم می کنیم:

$$GH(s)=\frac{100(1+0.1s)}{s(1+0.5s)(1+0.2s)}\rightarrow\begin{cases}100 & \text{بهره ثابت}\\ s & \text{قطب در مبدأ}\\ 1+0.1s & \text{صفر ساده}\\ 1+0.5s & \text{قطب ساده}\\ 1+0.2s & \text{قطب ساده}\end{cases}$$

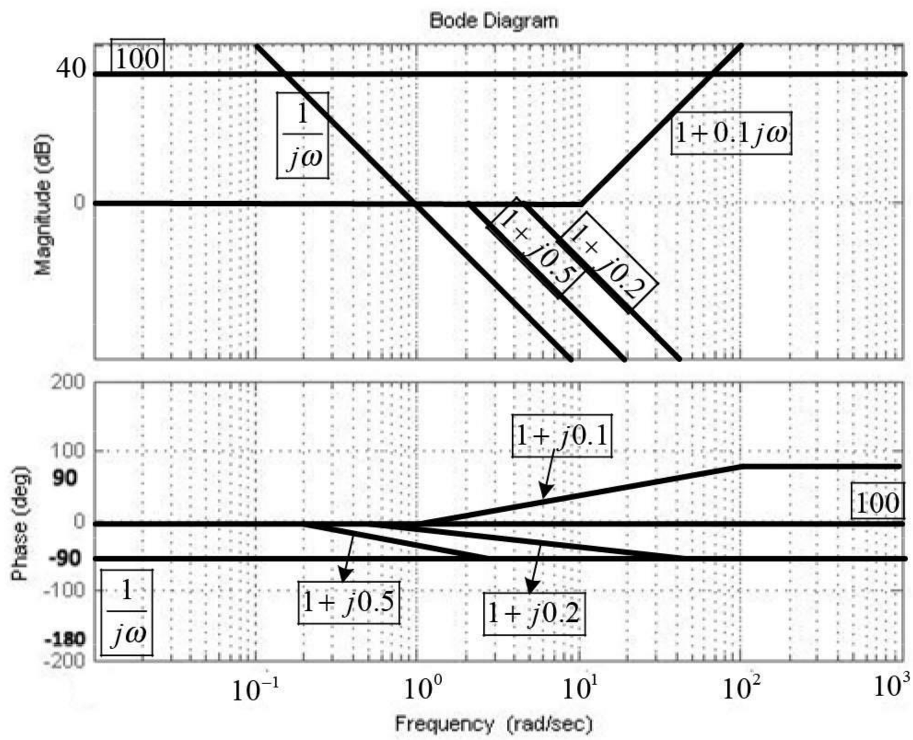
$$100:\begin{cases}20\log 100 = 40^{dB}\\ \angle(100) = 0^\circ\end{cases}$$

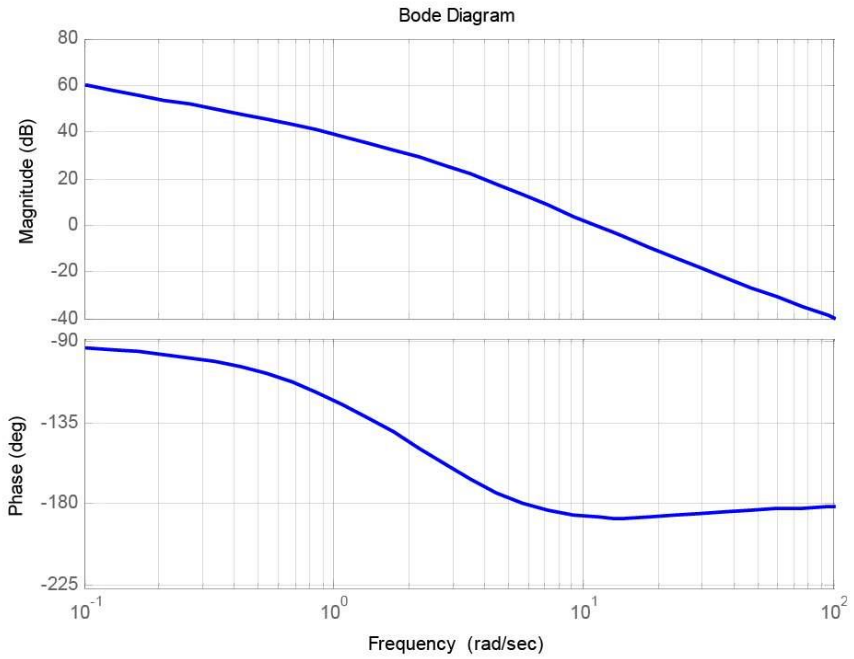
$$\frac{1}{j\omega}:\begin{cases}20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega\\ \angle\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -90^\circ\end{cases}$$

$$1+0.1j\omega: T=0.1\rightarrow\begin{cases}\omega T=1\rightarrow\omega=10\\ \omega T=0.1\rightarrow\omega=1\\ \omega T=10\rightarrow\omega=100\end{cases}$$

$$1+j0.5\omega: T=0.5\rightarrow\begin{cases}\omega T=1\rightarrow\omega=2\\ \omega T=0.1\rightarrow\omega=0.2\\ \omega T=10\rightarrow\omega=20\end{cases}$$

$$1+j0.2\omega: T=0.2\rightarrow\begin{cases}\omega T=1\rightarrow\omega=5\\ \omega T=0.1\rightarrow\omega=0.5\\ \omega T=10\rightarrow\omega=50\end{cases}$$



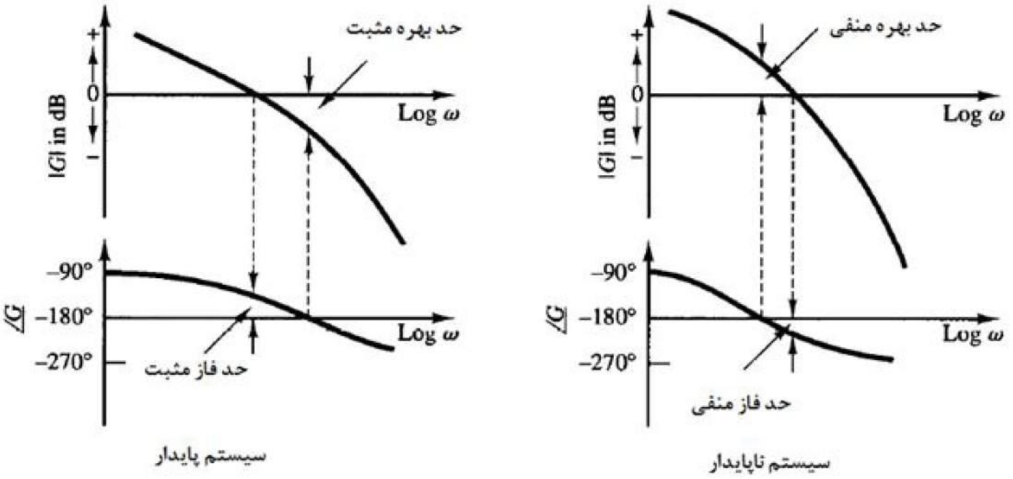


۴-۲-۴- محاسبه پارامترهای اصلی پایداری در حوزه فرکانس با استفاده از منحنی های بودی:

مقادیر فرکانس های قطع فاز و بهره و حد فاز و حد بهره را به راحتی می توان از روی نمودارهای بودی تشخیص داد. فرکانس قطع فاز، فرکانسی است که در آن زاویه $GH\left(j\omega\right)$ برابر $180°$ می باشد. برای محاسبه حد بهره به ازای این فرکانس، اختلاف نمودار اندازه $GH\left(j\omega\right)$ را با 0^{dB} اندازه می گیریم. اگر این مقدار زیر محور 0^{dB} باشد، حد بهره مثبت و در غیر اینصورت منفی خواهد بود.

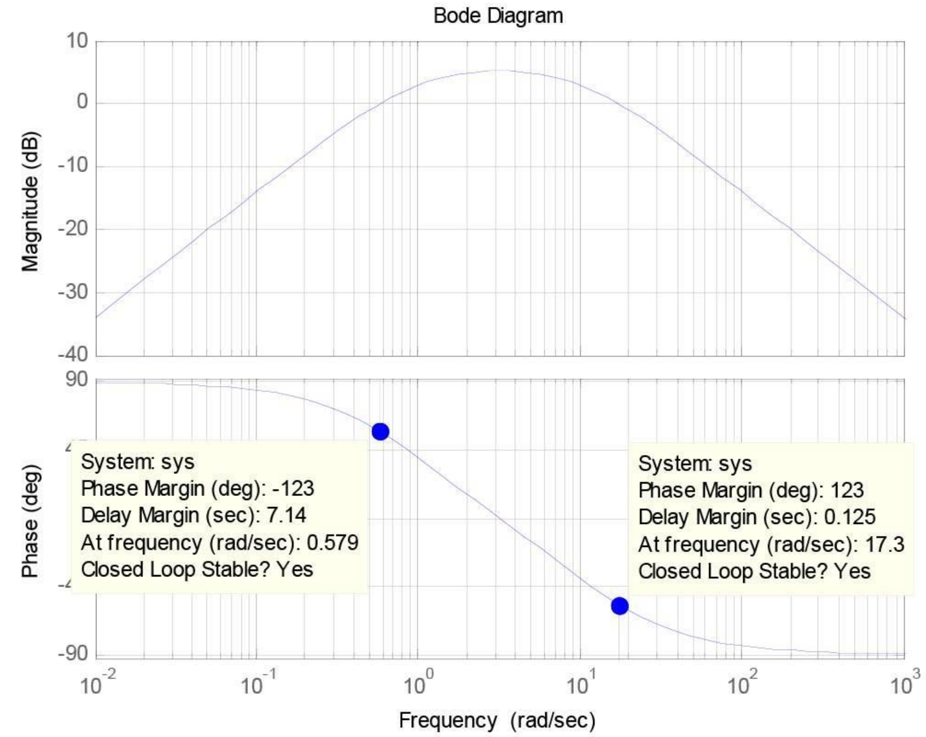
فرکانس قطع بهره، فرکانسی است که در آن اندازه $GH\left(j\omega\right)$ برابر 0^{dB} خواهد شد. برای محاسبه حد فاز به ازای این فرکانس، اختلاف نمودار فاز $GH\left(j\omega\right)$ را با محور $-180°$ اندازه می گیریم. اگر این مقدار بالای خط $-180°$ باشد، حد فاز مثبت و اگر خلاف آن باشد منفی خواهد بود.

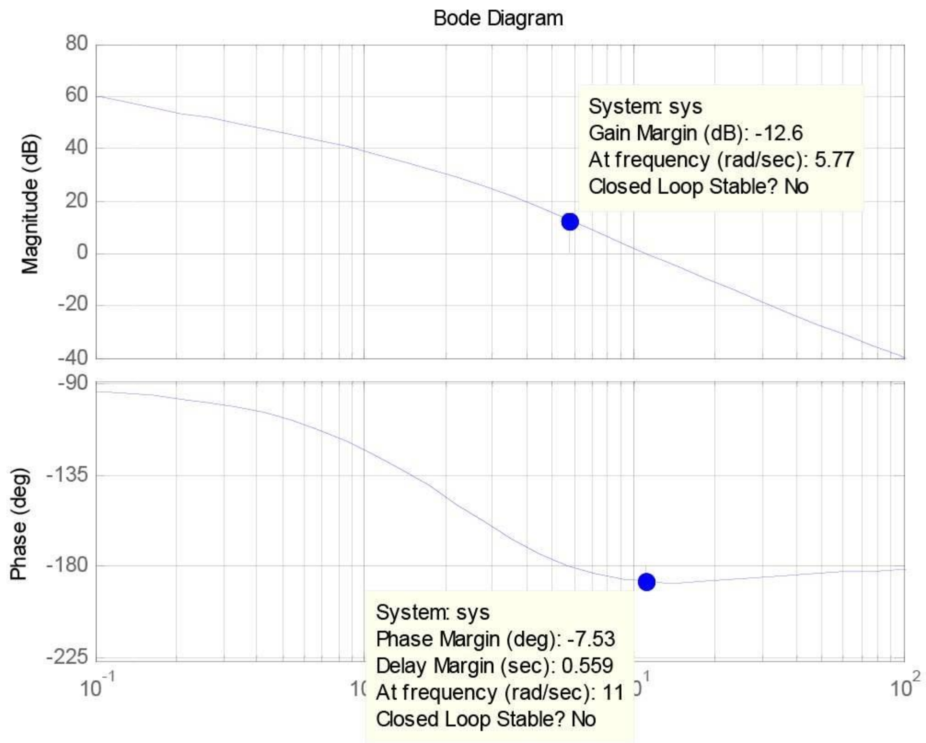
به شکل زیر توجه کنید:



شکل ۴-۱۱ نحوه تشخیص علامت جبری حدفاز و حدبهره از روی نمودارهای بودی

برای درک بهتر این موضوع، مجدداً به نمودارهای بودی مثالهای قبل باز می گردیم. به نمودارهای زیر توجه نموده و سعی کنید مقادیری که از حدفاز و حدبهره بدست می آورید را با مقادیر نمودار مطابقت دهید:

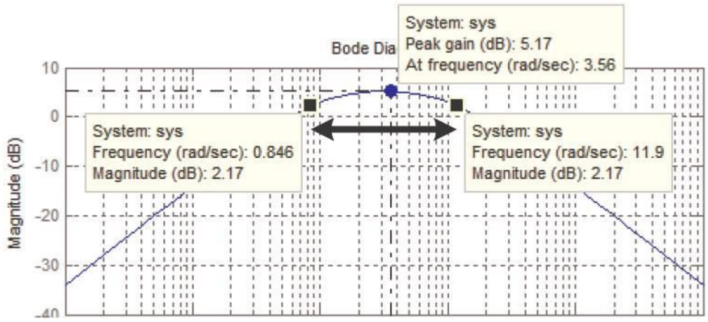




در آخر با ارائه یک تعریف این بحث را به پایان می بریم:

پهنای باند:
اندازه محدوده فرکانسی که سیستم سیگنالهای مربوطه به آن محدوده را از خود عبور می دهد را پهنای باند گویند. بر طبق تعریف پهنای باند یک سیستم محدوده فرکانسی است که در آن اندازه $GH\left(j\omega\right)$ به اندازه 3^{dB} افت داشته باشد.

به مثال زیر توجه کنید:



بنابراین پهنای باند این سیستم برابر $11.9-0.846=11.054$ می باشد.

بخش پنجم:

طراحی کنترل کننده های حوزه زمان و فرکانس

بخش پنجم: طراحی کنترل کننده های حوزه زمان و فرکانس:

۵-۱- مقدمه:

اکنون که تحلیل یک سیستم با استفاده از روش های حوزه زمانی و فرکانسی را آموختیم، برای دستیابی به یک پاسخ مطلوب یعنی پاسخی که دارای مشخصات عملکردی مطلوب باشد، نیاز به آموختن روشهای کنترل یک سیستم داریم.
مشخصات عملکردی مطلوب به چند دسته تقسیم می شوند:

۱. مشخصات مربوط به پاسخ پله (درصد فراجهش، زمان صعود، زمان مستقر شدن)
۲. مشخصات کلی سیستم (پایداری نسبی، خطای حالت دائمی، حساسیت کم نسبت به پارامترهای پاسخ گذرا)
۳. مشخصات حوزه فرکانسی (حد بهره، حدفاز، پهنای باند)

برای دسترسی به این مشخصات، باید یک کنترل کننده مناسب برای سیستم طراحی گردد. طراحی کنترل کننده عموماً به دو روش انجام می شود:

۱- روش طراحی در حوزه زمان (تعیین محل قطب ها به روش مکان ریشه ها)
۲- روش طراحی در حوزه فرکانس (نایکوئیست، بودی و زیگلر نیکولز)

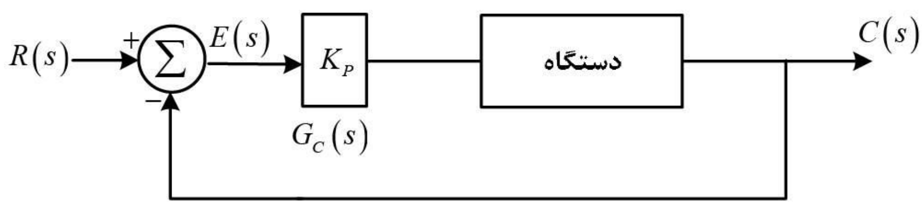
کنترل کننده در دیاگرام بلوکی یا بصورت سری با دستگاه می باشد و یا در شاخه فیدبک قرار دارد. کنترل کننده حالت اول را کنترل کننده سری و حالت دوم را کنترل کننده پس خوردی می نامند.

۵-۲- کنترل کننده های متداول در حوزه زمان:

۵-۲-۱- کنترل کننده تناسبی (P):

در کنترل کننده تناسبی[1] رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت می باشد. کنترل کننده تناسبی در واقع یک تقویت کننده با بهره قابل تنظیم است.

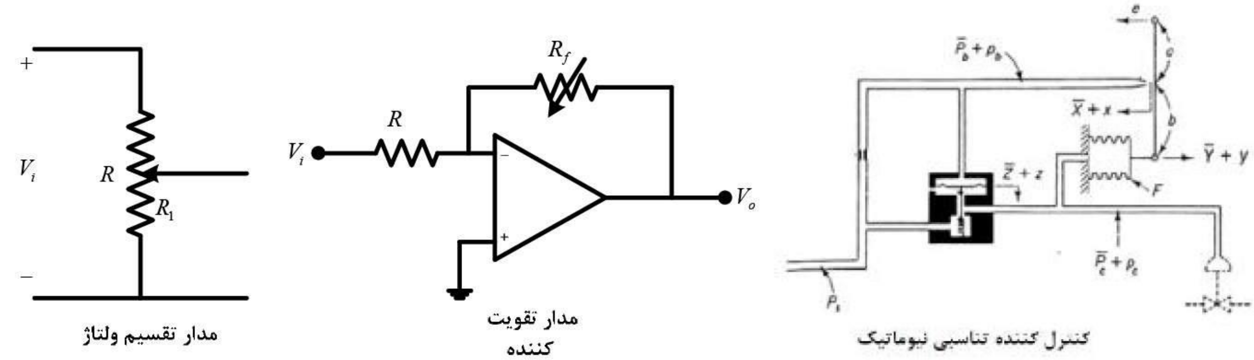
$$G_C(s) = K_P \qquad (۵-۱)$$



شکل ۵-۱: کنترل کننده تناسبی

شکل های زیر پیاده سازی[2] کنترلر تناسبی را به روش های مختلف نشان می دهد:

[1] Proportional
[2] Implementation



شکل ۵-۲: چند نمونه از پیاده سازی کنترل کننده تناسبی

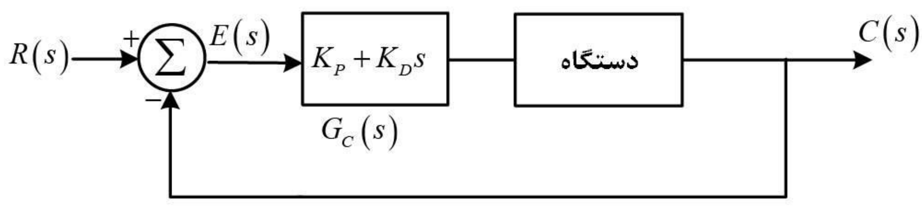
خصوصیات کنترلر تناسبی:

- کنترلر تناسبی به دلیل کاهش ثابت زمانی سیستم سبب افزایش سرعت سیستم می شود.
- این کنترلر بهترین گزینه برای کنترل سطح سیال می باشد.
- این کنترلر برای سیستم های مرتبه پایین مناسب است.
- این کنترلر با بهره بزرگ باعث کاهش خطای حالت دائمی می گردد.
- این کنترلر پهنای باند را افزایش داده و نسبت به نویز حساسیت بالایی دارد.

۵-۲-۲- کنترل کننده تناسبی- مشتق گیر (PD):

در کنترل کننده تناسبی – مشتق گیر[1] رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت و یک مشتق گیر می باشد.

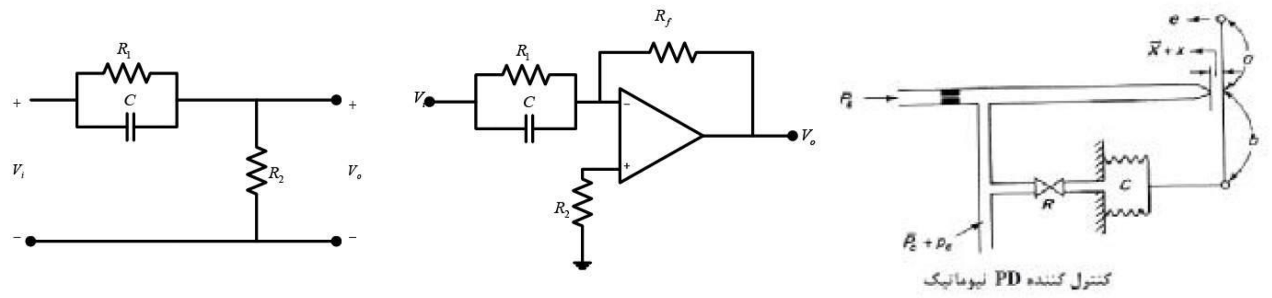
$$G_C(s) = K_P + K_P s \qquad \text{۲-۵}$$



شکل ۵-۳: کنترل کننده تناسبی- مشتق گیر

شکل های زیر پیاده سازی کنترلر تناسبی- مشتق گیر را به روش های مختلف نشان می دهد:

[1] Proportional-Derivative



شکل ۵-۴: چند نمونه از پیاده سازی کنترل کننده تناسبی –مشتق گیر

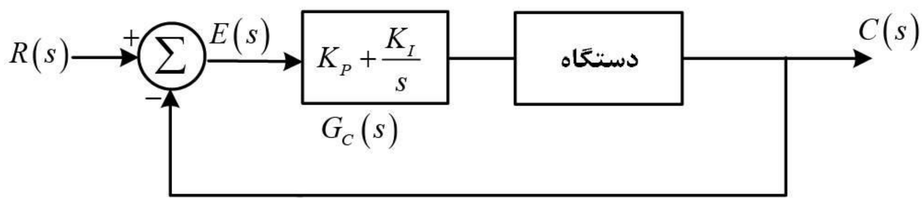
خصوصیات کنترلر تناسبی- مشتق گیر:

- این کنترلر یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز اضافه نموده و سبب افزایش پایداری حلقه بسته می گردد.
- این کنترلر از تغییرات ناگهانی ورودی جلوگیری می کند.
- این کنترلر برای کنترل اجسام متحرک نظیر وسائل نقلیه، کشتی، راکتهای فضایی و ... مناسب می باشد.
- این کنترلر پهنای باند را افزایش داده و نویز سیستم را زیاد می کند.
- این کنترلر روی خطای حالت دائمی تاثیری ندارد.

۵-۲-۳- کنترل کننده تناسبی- انتگرالگیر (PI):

در کنترل کننده تناسبی – انتگرالگیر[1] رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت و یک انتگرالگیر می باشد.

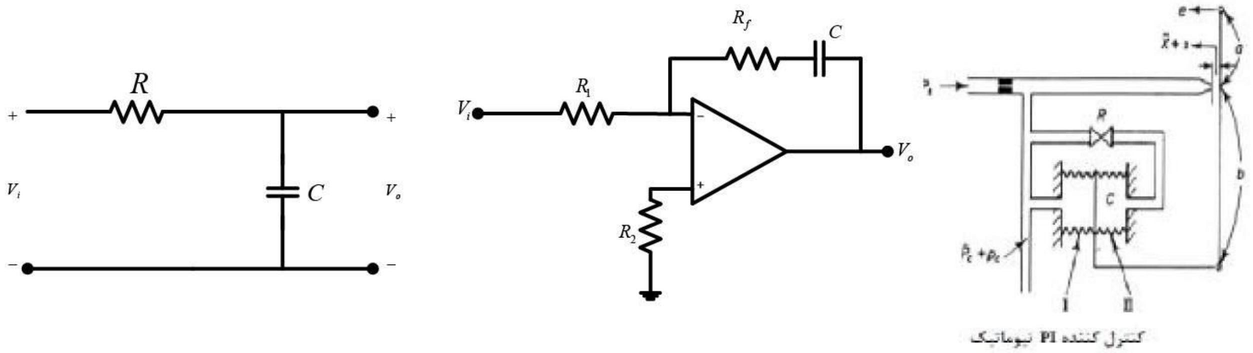
$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \qquad (۵-۳)$$



شکل ۵-۵: کنترل کننده تناسبی- انتگرالگیر

شکل های زیر پیاده سازی کنترلر تناسبی- انتگرالگیر را به روش های مختلف نشان می دهد:

[1] Proportional-Integrator



شکل ۵-۶: چند نمونه از پیاده سازی کنترل کننده تناسبی –انتگرالگیر

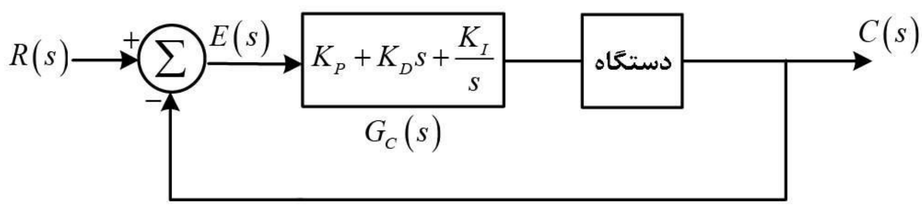
خصوصیات کنترلر تناسبی- انتگرالگیر:

- این کنترلر یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز اضافه می نماید.
- این کنترلر به دلیل افزودن یک قطب در مبدا به تابع تبدیل حلقه باز پایداری سیستم را کاهش می دهد.
- این کنترلر از نوسانات ورودی جلوگیری می کند.
- این کنترلر بیشتر در صنعت استفاده می گردد.
- این کنترلر نویز فرکانس بالا را حذف می کند.
- این کنترلر سرعت سیستم را کاهش می دهد.
- این کنترلر به دلیل افزایش نوع سیستم، خطای حالت دائمی را کاهش می دهد.

۵-۲-۴- کنترل کننده تناسبی-مشتق گیر - انتگرالگیر (PID):

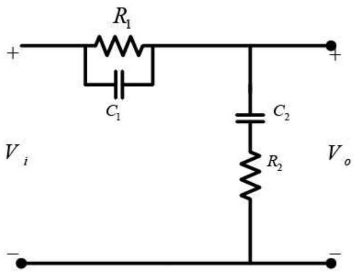
در کنترل کننده تناسبی –مشتق گیر - انتگرالگیر رابطه بین خروجی کنترل کننده و سیگنال خطا یک بهره ثابت، یک مشتق گیر و یک انتگرالگیر می باشد.

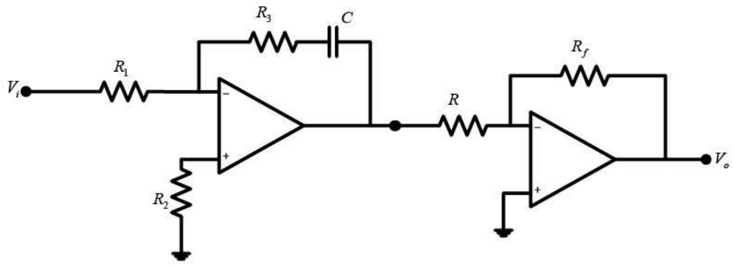
$$G_C(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} \tag{۴-۵}$$

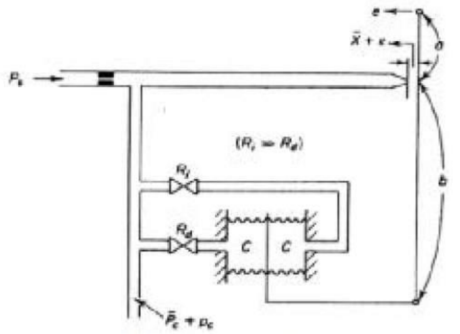


شکل ۵-۷: کنترل کننده تناسبی-مشتق گیر- انتگرالگیر

شکل های زیر پیاده سازی کنترلر تناسبی –مشتق گیر - انتگرالگیر را به روش های مختلف نشان می دهد:







کنترل کننده PID نیوماتیک

شکل ۵-۸: چند نمونه از پیاده سازی کنترل کننده تناسبی –مشتق گیر - انتگرالگیر

خصوصیات کنترلر تناسبی –مشتق گیر - انتگرالگیر:

- این کنترلر در برابر تغییرات ورودی، عکس العمل سریعی دارد.
- این کنترلر خطای حالت دائمی را کاهش می دهد.
- با انتخاب صحیح ثابت زمانی انتگرال گیر و بهره تناسبی، این کنترلر پایداری سیستم را افزایش می دهد.

۵-۳-کنترل کننده های متداول حوزه فرکانسی:

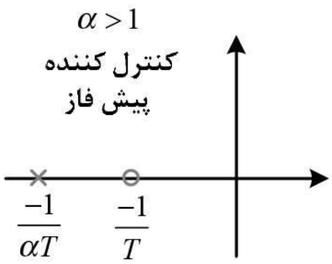
۵-۳-۱- کنترل کننده پیشفاز- کنترل کننده پس فاز:

کنترل کننده ای با فرم کلی

$$G_C(s) = \frac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \qquad ۵-۵$$

بسته به موقعیت صفر و قطب می توانند پیش فاز[1] و یا پس فاز[2] باشند. این کنترل کننده ها با توجه به رابطه ۵-۵ یک صفر در $s = \frac{-1}{T}$ و یک قطب در $s = \frac{-1}{\alpha T}$ دارند.

[1] Lead Controller
[2] Lag Controller

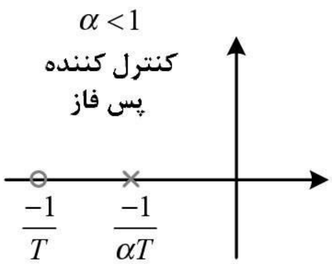


اگر مقدار $\alpha > 1$ باشد یعنی صفر کنترلر نسبت به قطب آن به مبدا نزدیک تر است و زاویه فازی که کنترل کننده دارد مثبت خواهد بود. در این صورت کنترلر را پیش فاز می نامیم. این نوع کنترل کننده معادل کنترل کننده PD حوزه زمان است.

$$\varphi = PM_{\text{desired}} - PM_{Plant} + 5^\circ$$

$$\alpha = \frac{1+\sin(\varphi)}{1-\sin(\varphi)}$$

$$T = \frac{1}{\omega_g \alpha}$$



اگر مقدار $\alpha < 1$ باشد یعنی صفر کنترلر نسبت به قطب آن از مبدا دورتر است و زاویه فازی که کنترل کننده دارد منفی خواهد بود. در این صورت کنترلر را پس فاز می‌نامیم. این نوع کنترل کننده معادل کنترل کننده PI حوزه زمان است.

اگر ω'_g فرکانس متناظر با حدفاز مطلوب سیستم باشد:

$$\omega'_g - 5^\circ = \omega_g$$

$$\left|G_P\left(j\omega_g\right)\right| = -20\log\alpha$$

$$T = \frac{\alpha}{10}\omega_g$$

۵-۳-۲- کنترل کننده پیشفاز- پس فاز:

کنترل کننده پیش فاز – پس فاز ترکیب دو کنترل کننده فوق می باشد. این نوع کنترل کننده معادل کنترل کننده PID حوزه زمان است.

◄ مثال ۵-۱

سیستم حلقه باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

جبرانساز پیشفازی برای این سیستم طراحی کنید بطوریکه خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر $\frac{1}{20}$ گردد و حاشیه فاز سیستم حداقل 50° باشد.

حل:

$$\begin{cases} G(s) = G_C(s)G_P(s) \\ G_C(s) = \dfrac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \times \frac{4}{s(2+2)} = \frac{4K_C(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)}$$

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} sR(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{1}{1+\dfrac{4K_C(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)}}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\right)\left(\frac{\cancel{s}(1+\alpha Ts)(s+2)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)+4K_C(1+Ts)}\right) = \frac{2}{4K_C} = \frac{1}{20}$$

$$\rightarrow \boxed{K_C = 10}$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{40(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+2)}$$

$$|G_P(j\omega_g)| = 1 \rightarrow \frac{40}{\omega_g\sqrt{4+(\omega_g)^2}} = 1 \rightarrow \omega_g\sqrt{4+(\omega_g)^2} = 40$$

$$\omega_g^2(\omega_g^2+4) = 1600 \rightarrow \omega_g^4 + 4\omega_g^2 - 1600 = 0$$

$$\xrightarrow{\omega_g^2 = x} x^2 + 4x - 1600 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -42.05 \\ 38.05 \ \boxtimes \rightarrow \omega_g = \sqrt{38.05} = 6.17 \end{cases}$$

$$\angle G_P(j6.17) = 0 - 90° - \tan^{-1}\left(\frac{6.17}{2}\right) = -162.04°$$

$$\rightarrow PM = -162.04° + 180° = 18°$$

اکنون به طراحی کنترل کننده پیش فاز می پردازیم:

$$\varphi = 50° - 18° + 5° = 37°$$

$$\alpha = \frac{1+\sin(37°)}{1-\sin(37°)} \simeq 4 > 1 \ \boxtimes$$

$$T = \frac{1}{\omega_g \alpha} = \frac{1}{6.17\times 4} = 0.04$$

$$\rightarrow G_C(s) = \frac{(1+0.040s)}{(1+0.162s)}$$

◄ مثال ۵-۲

سیستم حلقه باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G_p(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

جبرانساز پسفازی برای این سیستم طراحی کنید بطوریکه خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر $\frac{1}{100}$ گردد و حاشیه فاز سیستم $45°$ باشد.

حل:

$$\begin{cases} G(s) = G_C(s)G_P(s) \\ G_C(s) = \dfrac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{K_C(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \times \frac{2500}{s(s+25)} = \frac{2500K_C(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+25)}$$

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} sR(s)\left(\frac{1}{1+G(s)}\right) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{1}{1+\dfrac{2500K_C(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts)(s+25)}}\right)$$

$$=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\left(\frac{1}{\cancel{s^2}}\right)\left(\frac{\cancel{s}\left(1+\alpha Ts\right)\left(s+25\right)}{s\left(1+\alpha Ts\right)\left(s+25\right)+2500K_C\left(1+Ts\right)}\right)=\frac{25}{2500K_C}=\frac{1}{100}$$

$$\to \boxed{K_C=1}$$

$$\to G(s)=\frac{2500\left(1+Ts\right)}{s\left(1+\alpha Ts\right)\left(s+25\right)}$$

$$\to PM=45^\circ \to \angle G_P(j\omega_g')+180^\circ=45^\circ \to \angle G_P(j\omega_g')=-135^\circ$$

$$\angle G_P(j\omega_g')=0-90^\circ-\tan^{-1}\left(\frac{\omega_g'}{25}\right)=-135^\circ \to \tan^{-1}\left(\frac{\omega_g'}{25}\right)=45^\circ$$

$$\to \frac{\omega_g'}{25}=\tan\left(45^\circ\right)=1 \to \omega_g'=25 \to \omega_g=20$$

$$\left|G_P(j20)\right|=\frac{2500}{20\sqrt{25^2+\left(20\right)^2}}=3.90$$

$$3.90=-20\log\alpha \to \alpha=10^{\frac{-3.9}{20}}=0.6383<1 \quad ☑$$

$$T=\frac{\alpha}{10}\omega_g'=1.2765$$

$$\to G_C(s)=\frac{\left(1+1.27s\right)}{\left(1+0.81s\right)}$$

مراجع:

- B. C. KUO, *Digital Control Systems*, HRW series in electrical and computer engineering, 1980
- محمود دیانی، *مهندسی کنترل*، انتشارات نص، ویرایش سوم، ۱۳۷۹