تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها

استاد شیرین آبادی

(جلسه اول)

انواع سیگنال: ۱- سیگنال پیوسته C.T $x(t) ; -\infty < t < +\infty$

۲- سیگنال گسسته D.T $x[n] ; n = 0, \pm1, \pm2, ...$

- در پردازش یک سیگنال، سیگنال جدید بدست می‌آید.

مثال) $y(t) = f(x(t))$

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$$

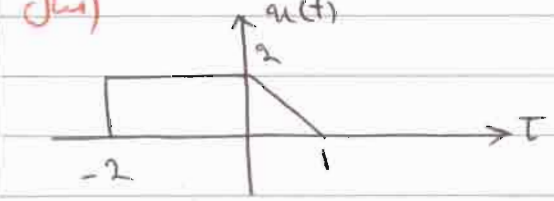
اعمال روی سیگنال زمان پیوسته:

۱) شیفت زمانی: $x(t) \xrightarrow{shift} x(t-t_0)$

if: $t_0 > 0 \longrightarrow$ شیفت به راست

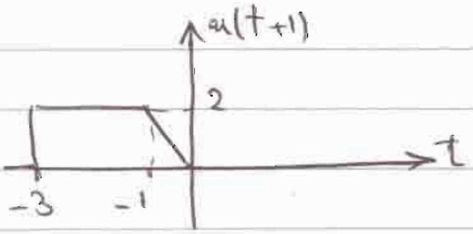
if: $t_0 < 0 \longrightarrow$ شیفت به چپ

مثال)



$x(t+1) = ? \rightarrow t+1=0 \rightarrow t=-1<0$

یک واحد شیفت به چپ



$-2-1=-3$

$0-1=-1$

$1-1=0$

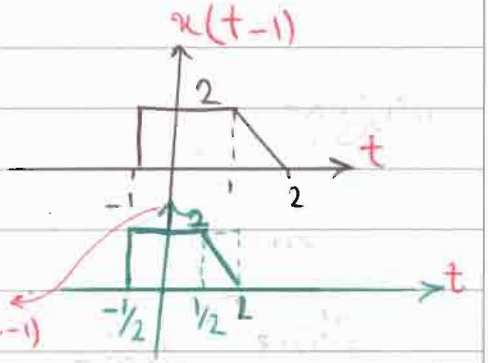
نکته: در اثر شیفت زمانی دامنه و مساحت تغییر نمی‌کند.

$$x(t)\xrightarrow[\text{shift}]{\text{شیفت}}x(t-t_0)\xrightarrow[\text{scaling}]{(\times a)}x(at-t_0)$$

مثال) $x(2t-1)=?$

$$\rightarrow x(t)\xrightarrow[t=1]{\text{shift}}x(t-1)\Longrightarrow$$

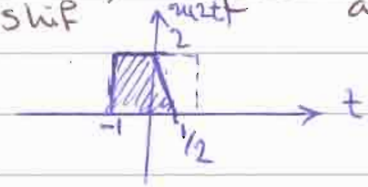
$$x(t-1)\xrightarrow[\text{scaling}]{\times 2}x(2t-1)\Longrightarrow$$



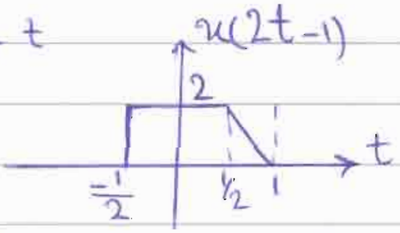
راه دوم: در این روش اول scaling و پس شیفت می‌دهیم:

$$x(t)\xrightarrow[\times 2]{\text{scaling}}x(at)\xrightarrow[\text{shift}]{t\to t-\frac{t_0}{a}}x\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]\Rightarrow x(t)=x(at-t_0)$$

$$x(t)\xrightarrow[\text{scaling}]{\times 2}x(2t)$$

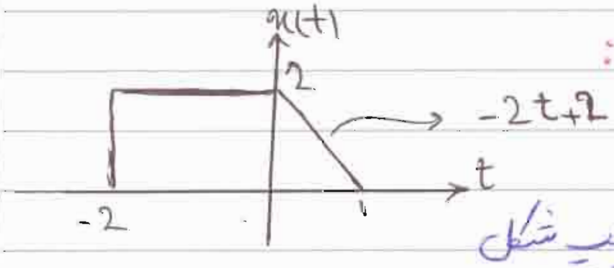


$$x(2t)\xrightarrow[t=1]{\text{shift}}x(2t-1)\rightsquigarrow$$



نکته: تمام این قسمت عملیات‌ها، شیفت زمانی - وارون زمانی - تغییر مقیاس - مختلط خطی بررسی شد.

تبدیل غیرخطی روی زمان در حالت پیوسته:



$x(t^2)=?$

چون t^2 یک عبارت مثبت است پس سمت چپ شکل

الان از ۰ تا 2- را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2<a^2 & |x|<a\rightarrow -a<x<a\\ x^2>a^2 & |x|>a\rightarrow \begin{cases}x>a\\ x<-a\end{cases}\end{cases}$$

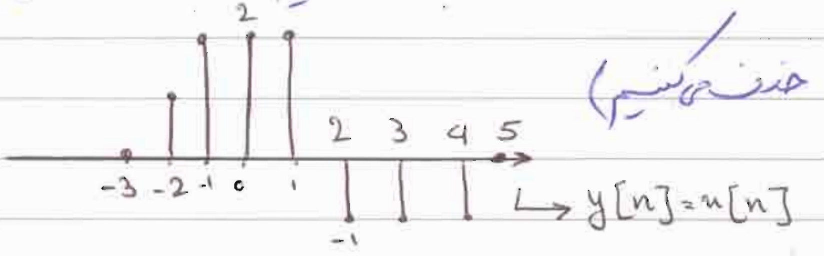
در صفحه بعد قسمت معادله نویسی توجه شود ← ⊛

$$0<t^2<1\xrightarrow[\text{از ۰ تا 1 هم خط } -2t+2 \text{ است عبارت } t^2 \text{ را وارد می‌کنیم}]{\text{با توجه به اینکه تا 1- را در نظر نگرفتیم و}}$$

نکته: عمل Down-sampler به تعداد M-1 نمونه را به فاصله M تایی حذف می‌کند

(در این تبدیل محور زمان بر M تقسیم می‌شود، نمونه‌هایی که عدد روی محورشان صحیح نشده را حذف می‌کنیم)

$y[n] = x[2n] = ?$



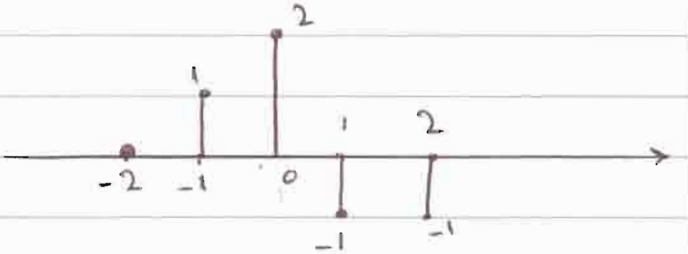
حل تشریحی: $y[2] = x[4] \rightarrow -1$

$y[1] = x[2] \rightarrow -1$

$y[0] = x[0] \rightarrow 2$

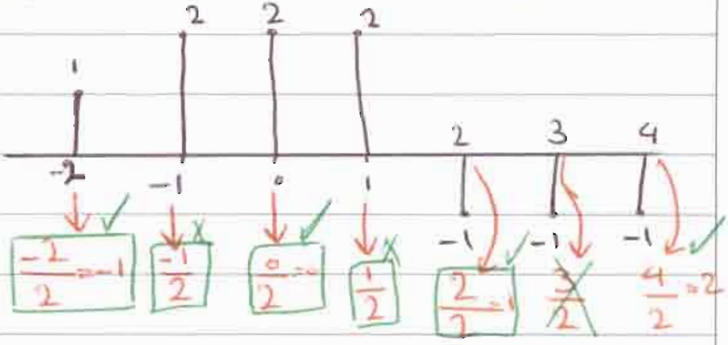
$y[-1] = x[-2] \rightarrow 1$

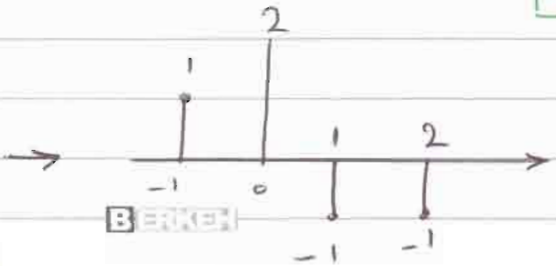
$y[-2] = x[-4] \rightarrow 0$

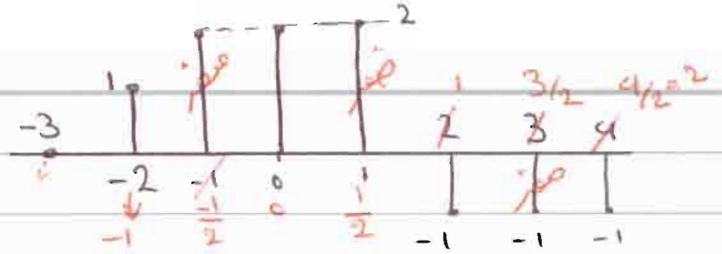


راه حل تستی: محور زمان را بر M تقسیم می‌کنیم نمونه‌هایی که عدد روی محورش غیر صحیح است را حذف می‌کنیم (در Down-sample، وقتی محور زمان را بر M تقسیم کردیم، مقادیر جدید مشخص می‌شود)

حل مثال با روش تستی → $\boxed{m=2}$







* در Down-sampler گفتیم در هر فاصله M تایی، M-1 نمونه حذف می‌شد، مثلاً در هر فاصله 3 تایی، 2 نمونه وسط حذف می‌شد، مثلاً در نمونه‌های قبلی در فاصله 3 ها، 2 تای وسط حذف شد

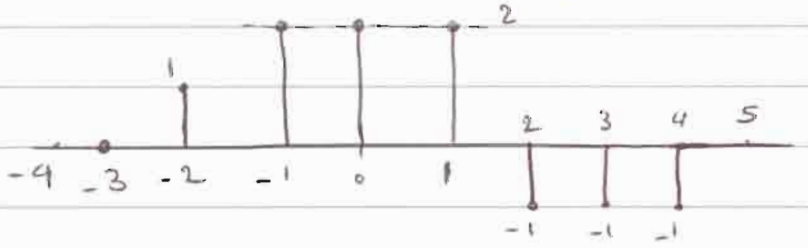
* در up-sampler گفتیم در فاصله M تایی، M-1 صفر اضافه می‌شود، مثلاً شکل بالا در فاصله بین 0 تا 2 یک صفر، وسط اضافه شده است.

نکته: اگر سیگنال را اول ↑M رد کنیم و سپس اول ↓M رد کنیم، خروجی برابر ورودی است ولی اگر ابتدا از ↓M رد کنیم چون sampleها کامل نیستند پس از عبور از ↑M خروجی و ورودی با هم یکی نمی‌شوند.

در واقع up-sampler معکوس Down-sampler است ولی Down-s معکوس ندارد.

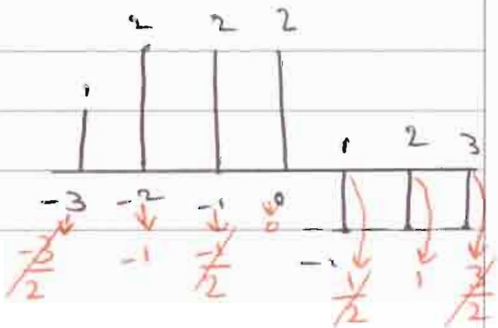
ه) تبدیل مختلط: همان شکل قبلی را در نظر بگیرید.

$x[2n+1]=?$



$x[n] \xrightarrow[n=-1<0]{shift} x[n+1] \longrightarrow$

شیفت به چپ



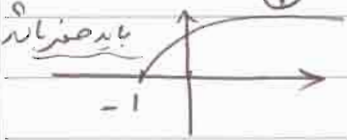
حل) الف: (ادامه) بازه قطعاً صفر است $\rightarrow \frac{-t}{3} > 2 \longrightarrow -t > 6 \rightsquigarrow \boxed{t < -6}$

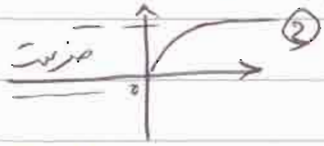
ب: اول می‌بینیم $u(1-t)$ در کجا صفر است؟ $\rightarrow u(1-t)+u(2-t)$

یعنی در $t<-1$ صفر است $(u(1-t))$ ⇐ $\rightsquigarrow 1-t>2 \longrightarrow -t>1 \rightarrow \overset{①}{t<-1}$

حال $u(2-t)$ را بررسی می‌کنیم: $u(2-t) \rightsquigarrow 2-t>2 \rightarrow -t>0 \rightarrow \overset{②}{\boxed{t<0}}$

یک شکل حدودی ترسیم کنیم.





در شکل ① به ازای $t<-1$ ← $u(t)=0$ است و در شکل ② هم به ازای $t<-1$ ← $u(t)=0$

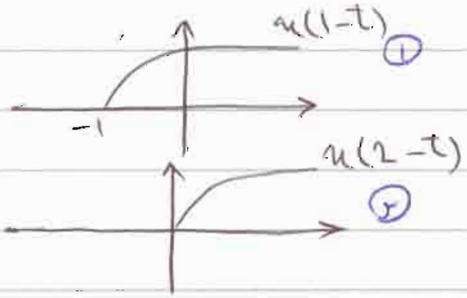
② است یعنی داریم: $u(t<-1)+u(t<-1)$ در نتیجه حاصل این عبارت صفر است. ولی در شکل دوم

به ازای $t<0$ ← $u(t)=0$ است اما در شکل ① $t<0$ ← $u(t)\neq 0$ است یعنی

$u_1(t<0)+u_2(t<0)\neq 0$ ← پس می‌توان از این: در عبارت نتیجه گرفت جواب به ازای $\boxed{t<-1}$

صفر است.

ج) $u(1-t)\,u(2-t) \rightarrow$

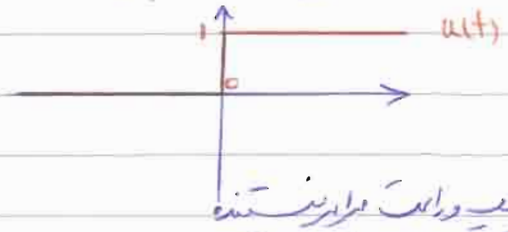


در این‌جا به ازای $t<0$ شکل ① مقداری غیر صفر و ② مقدارش صفر است:

حاصل شکل دو ← $\underline{0} \times \underset{\text{شکل ①}}{\underset{\downarrow}{\text{عدد}}} = \underset{\downarrow}{0}$

ادامه صفحه بعد

نکته: تابع پله در صفر ناپیوسته است. گاهی روی شکل می‌نویسند $u(0)$ ناپیوسته است



و یا گاهی $u(0)=\frac{1}{2}$ است.

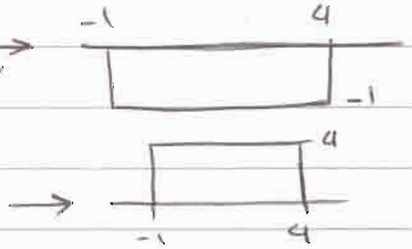
منظور از اینکه می‌گوییم در صفر ناپیوسته است یعنی حد چپ و راست برابر نیستند

نکته: شکل $A\,[u(t-\alpha)-u(t-\beta)]$ به شرط اینکه $\beta>\alpha$ (t_0 طرف دوم تفاضل از t_0 طرف اول تفاضل بیشتر باشد) به صورت زیر می‌شود.

مثال) $u(t-4)-u(t+1)$

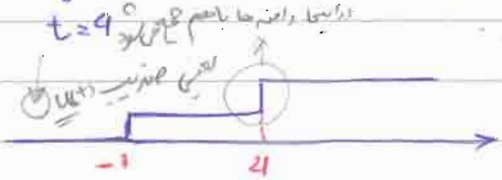
$t=4$ $\quad t=-1$

$\xrightarrow[\beta>\alpha]{}\ -(u(t+1)-u(t-4))\ \xrightarrow[\text{شکل قرینه می‌شود}]{\text{به خاطر علامت منفی}}$



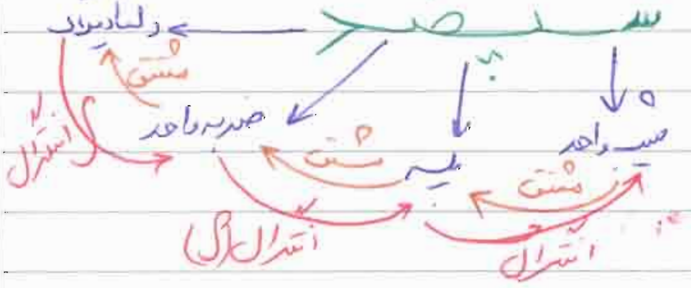
مثال) $u(t+1)+u(t-4)\longrightarrow$ به خاطر علامت + از t 4 به بعد پله می‌شود.

$t=-1$ $\quad t=4$ از اینجا دامنه‌ها با هم جمع می‌شود



۲) ضربه واحد: تابع ضربه‌ای که ما می‌شناسیم غیر از تابع ضربه original به دست آمده است:

با توجه به کلمه



نکته: در تابع ضربه $\delta(t-t_0)$، منظور از لحظه وقوع ضربه همان t_0 است.

نکته: حال می‌دانیم که انتگرال تابع ضربه در لحظه وقوع آن، اگر لحظه وقوع در داخل بازه انتگرال‌گیری باشد جواب انتگرال 1 است.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} 1 & t_0 \in \alpha,\beta \ * \\ 0 & t_0 \notin \alpha,\beta \end{cases}$$

زمان وقوع ضربه

* این درست همان تعریف پله واحد است:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

نکته $\Rightarrow$ $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau$ یعنی پله، ضربه‌های به هم چسبیده است.

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{t}^{-\infty} -\delta(\eta)\,d\eta = \int_{-\infty}^{t} \delta(\eta)\,d\eta$$

$t-\tau=\eta$

$-d\tau = d\eta$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

نکته: $\delta(t)$ یک تابع زوج است.

نتیجه:

$$\begin{cases} \delta(-t) = \delta(t) \\ \delta(-t+t_0) = \delta(t-t_0) \end{cases}$$

مثال) $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t-2) = 0 \rightarrow$ چون لحظه‌ی وقوع آن در انتگرال نیست.

$\int_{0}^{3} \delta(t-2) = 1 \rightarrow$ زیرا لحظه وقوع آن در بازه انتگرال وجود دارد.

خواص سیگنال ضربه:

① $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1 \quad \forall \tau$

خاصیت ④ $\Rightarrow \delta(-t) = \delta(t) \rightarrow$ تابع ضربه یک تابع زوج است.

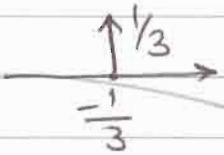
حالت خاص $\rightarrow \delta(-t+t_0) = \delta(-(t-t_0)) = \delta(t-t_0)$

مثال $\rightsquigarrow \delta(-t+4) = \delta(-(t-4)) = \delta(t-4)$

خاصیت ⑤ $\Rightarrow \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

مثال $\rightsquigarrow \delta(-3t-1) = \delta(-(3t+1)) = \delta(3t+1) = \delta(3(t+\frac{1}{3}))$

$= \frac{1}{3}\delta(t+1/3) \rightsquigarrow t = \frac{-1}{3} \rightarrow$



زمان وقوع ضربه

ریشه ها رو دارد

نکته مهم:

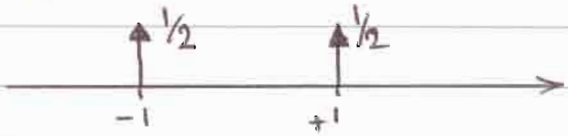
$$\delta(f(t)) = \delta(\overbrace{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)\dots(t-t_n)}^{f(t)}) =$$

$$= \frac{1}{|f'(t)|}\delta(t-t_1) + \frac{1}{|f'(t_2)|}\delta(t-t_2) + \dots + \frac{1}{|f'(t_n)|}\delta(t-t_n)$$

مثال) $\delta(t^2-1) = ? \Rightarrow \delta(\underbrace{(t-1)(t+1)}_{f(t)}) =$ t_1 t_2

$$\Rightarrow = \frac{1}{|f'(t_1=1)|}\delta(t-1) + \frac{1}{|f'(t_2=-1)|}\delta(t-1) = \frac{1}{2}(\delta t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)$$

$f'(t) = 2t \rightsquigarrow \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f(1) = 2 \end{cases}$



$\delta(t^2-1) = \delta(1-t^2)$

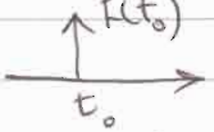
جواب یکی ←

ولی به بقیه کاری ندارد. مهم لحظه وقوع ضربه است.

خاصیت 6 را با خاصیت کانولوشن اشتباه نگیرید

$f(t) * \delta(t) = f(t)$

حالت کلی‌تر ⑥ $\rightarrow f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$



نکته:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\delta(t-t_0) = \begin{cases} f(t_0) & \alpha < t_0 < \beta \\ 0 & \text{O.W} \end{cases}$$

O.W → غیره

به بیان ساده‌تر می‌دانیم $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$ اگر t_0 در بازه انتگرال‌گیری باشد $\int_{\alpha}^{\beta}\delta(t-t_0)=1$ در نتیجه $f(t_0)\int_{\alpha}^{\beta}\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ و در بقیه موارد که t_0 در بازه انتگرال‌گیری نباشد مقدار انتگرال صفر می‌شود یعنی $0 \times f(t_0) = 0$

خاصیت ⑦: می‌دانیم: $f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین مشتق}} f'(t)\,\delta(t) + f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t)$$

طبق خاصیت غربالی

$$\Rightarrow f'(0)\,\delta(t) + f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t)$$

حل تست ۳۳۱ کدام گزینه تابع $e^{-t}\delta'(t)$ برابر است؟

یادآوری: $\int e^{au}\,du = \frac{1}{a}e^{au} + c$

$e^{-t}\delta(t) = \delta(t)$

پس انتگرال ضرب تابع در مشتق ضربه، برابر است با منهای مشتق تابع در نقطه وقوع ضربه.

یادآوری: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\,\delta(t) = f(0)$

و در اینجا هم، انتگرال ضرب تابع در تابع ضربه برابر است با مقدار تابع در نقطه وقوع ضربه:

تست ۴۲۵: حاصل انتگرال زیر در کدام $\delta(t)$ تابع ضربه واحد و $\delta'(t)$ مشتق آن باشد چقدر است؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\underbrace{(t+2)\,\delta'(t+1)}_{①}+\underbrace{(e^{-|t|}+t^2+2)\,\delta(e^{-|t|}+t^2+1)}_{②}\Big]dt$$

نکته:

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{مقدار بزرگ} & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$$

$$① \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}(\underbrace{t+2}_{t+1+1})\,\delta'(t+1)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\cancelto{-1}{(t+1)}\,\delta'(t+1) + \int_{-\infty}^{+\infty}\cancelto{0}{\delta'(t+1)}\,dt$$

$$\boxed{= -1}$$

② ← چون هسته مقدار + دارد بنابراین δ آن همیشه صفر است.

② ← صفر کلاً

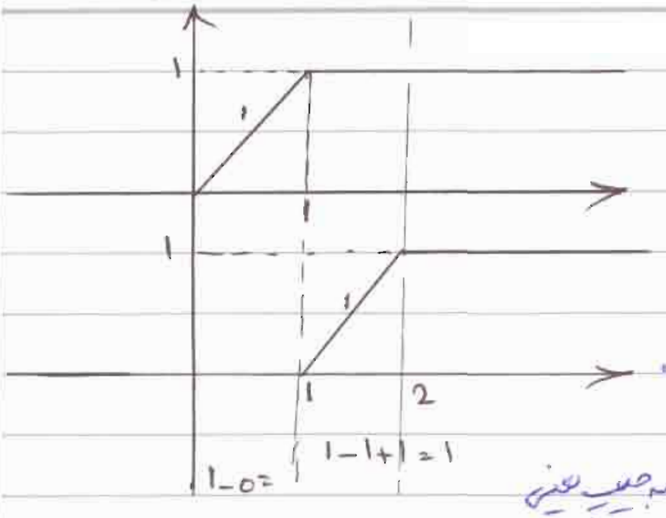
نکته:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\,dt = 0$$

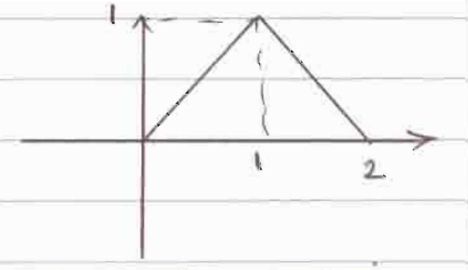
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,f(t)\,dt = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta'(t)\,dt = -f'(0)$$

۳، سیگنال شیب واحد (ramp):

$$r(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



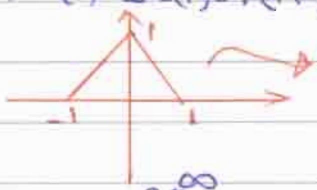
$\Longrightarrow$



این مثلث اشاره به تابع $\Lambda(t)=tri(t)$ دارد.

این مثلث یک مثلث متقارن است، با شیفت به چپ یعنی

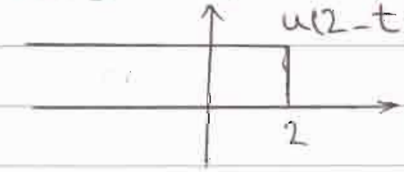
$t=-1$ رو ترسیم تقارن این شکل را بسازیم: $tri(t)=\Lambda(t)=r(t+1)-2(r(t))+r(t-1)$



مثال 363: اگر $u(t)$ تابع پله واحد و $r(t)$ تابع شیب واحد باشد، مقدار A چقدر خواهد بود؟

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} r(16-t^2)u(2-t)\,dt$$

یادآوری: $r(t)=tu(t)$ و $r(f(t))=f(t)u(f(t))$



تابع مقدار $t<2$ درست $\rightsquigarrow$ ar $2-t>0 \rightarrow \boxed{t>2}$

همچنان مثبت باشه ۱ است

$\boxed{u(2-t)=1}$

$$r(f(t))=f(t)u(t)\xrightarrow{f(t)>0}=f(t)$$

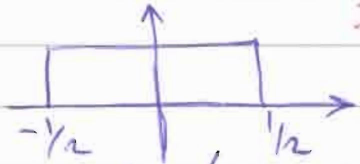
$$r(16-t^2)=(16-t^2)u(t)\xrightarrow[-4<t<4]{16-t^2>0}=16-t^2\longrightarrow A=\int_{-\infty}^{2}+\int_{2}^{+\infty}\nearrow 0$$

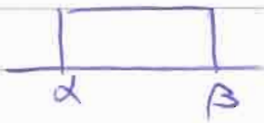
حد به ازای $t<2$ مقدار داریم

$$\rightarrow=\int_{-4}^{2}16-t^2\,dt=16t-\frac{t^3}{3}\Big|_{-4}^{2}=\left(32-\frac{8}{3}\right)=\ldots$$

۵) پالس مستطیل:

$$rect(t) = \Pi(t) \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$





مطابق همان نکته‌ای که در مورد تابع پله داشتیم:

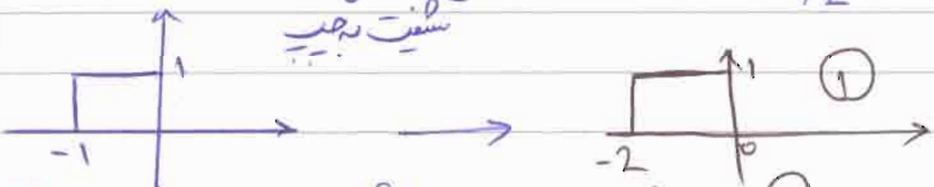
$$A\left[u(t-\alpha) - u(t-\beta)\right] \longrightarrow u(t+1/2) - u(t-1/2)$$

$\beta > \alpha$

مثال) $\Pi\underbrace{\left(\frac{t+1}{2}\right)}_{①} + \Pi\underbrace{(t-1/2)}_{②} = ?$

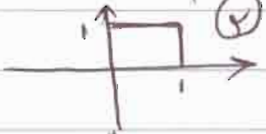
$① \rightarrow \Pi(t) \xrightarrow[t_0=-1/2]{shift} \Pi(t+1/2) \xrightarrow[\times 1/2]{scaling} \Pi\left(\frac{1}{2}t + 1/2\right)$

شیفت به چپ

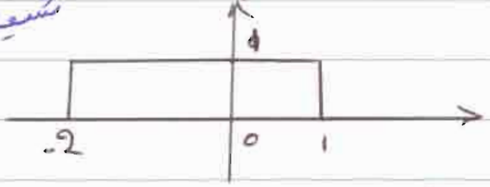


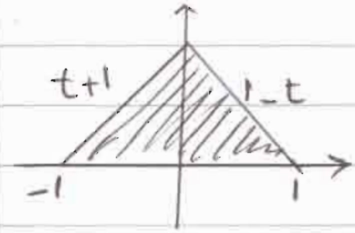
$② \rightarrow \Pi(t) \xrightarrow[t_0=1/2]{shift}$

شیفت به راست



$\xrightarrow{① + ②}$



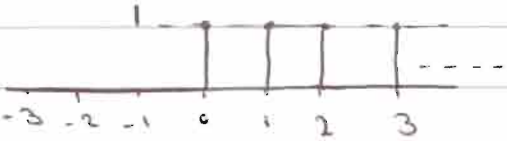


۶) سیگنال مثلثی متقارن:

$$tri(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

جلسه ی دهم ۱۰

سیگنال های مهم گسسته:



۱- پله واحد:

۲- ضربه واحد:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

می بینیم مقدار سیگنال ضربه واحد گسسته با پیوسته متفاوت است. سیگنال ضربه واحد پیوسته مقداری بی نهایت و سطح زیر نمودار آن ۱ بود. در صورتی که در گسسته دارای مقادیر صفر و ۱ است.

$\boxed{\delta[0] = 1}$ $\boxed{\delta(0) = \infty}$

گسسته ↑ ↑ پیوسته

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1}$$

نکته: پرانتز ← یعنی سیگنال پیوسته $\delta(\ )$

کروشه ← یعنی سیگنال گسسته $\delta[\ ]$

نکته: در سیگنال های پیوسته مشتق می گرفتیم در سیگنال ها

گسسته تفاضل مرتبه ی اول:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

در سیگنال های پیوسته هرجا که انتگرال می گرفتیم به جایش در سیگنال های گسسته جمع می کنیم.

تفاضل مرتبه ی اول: ←

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

↳ این طوری از طریق تابع پله ضربه را ساخته ایم

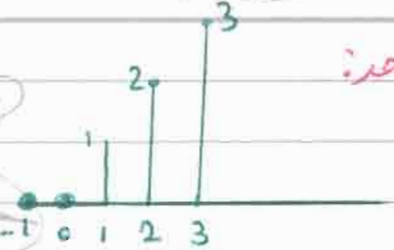
$nu[n-1] = (n-1+1)u[n-1] \rightsquigarrow (n-1)u[n-1] + u[n-1]$

$= r(n-1) + u[n-1]$?

۴) شیب واحد:

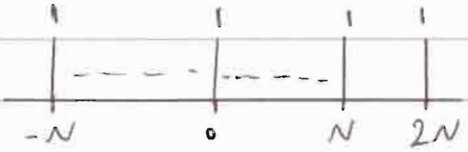
$r[n] = nu[n]$

~~$= nu[n-1] = (n+1)u[n] - \delta[n]$~~ ⇒



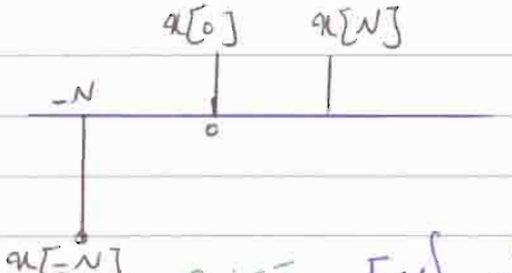
۵) قطار ضربه:

$$x_p[n] \triangleq p_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-\underset{\text{دوره تناوب}}{kN}] \quad (N: \text{دوره تناوب})$$



$$x[n]p_N[n] = \begin{cases} x[kN] & n = kN \\ 0 & n \neq kN \end{cases}$$

← این تابع یک سیستم نمونه برداری است که شکل آن به صورت زیر می‌باشد:



زوج و فرد بودن سیگنال:

قسمت زوج $x(t)$ ⇒ $Ev\{x(t)\} = x_e(t)$

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$x(t)$ قسمت فرد ⇒ $Od\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = x_o(t)$

توجه:

$x(t) = \underbrace{x_e(t)}_{\text{قسمت زوج}} + \underbrace{x_o(t)}_{\text{قسمت فرد}}$ ← سیگنال اصلی

if $x(t)$: زوج ⇒ $x(t) = x_e(t)$; $x_o(t) = 0$

if $x(t)$: فرد ⇒ $x(t) = x_o(t)$; $x_e(t) = 0$

مثال) اگر $x(t)$ علّی باشد، کدام رابطه بین $x_o(t)$ و $x_e(t)$ برقرار است؟

$$t<0 \rightarrow x(t)=0 \rightarrow x(t)=x_o(t)+x_e(t)=0 \rightarrow x_o(t)=-x_e(t) \quad \boxed{t<0}$$

$$\boxed{t>0 \longrightarrow x_e(t)=x_o(t)=\frac{x(t)}{2}}$$

سؤال 294:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x(t)-x(-t))\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x(-t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{matrix}-t=\tau\\ -dt=d\tau\end{matrix}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}(3+\underline{\underline{2}})-\frac{1}{2}(-3\underline{\underline{-1}})=\boxed{4.5}$$

تابع ضربه

قسمت مزدوج متقارن:

$$x_{cs}[n]=\frac{x[n]+x^*[-n]}{2}$$

$$x[n]=\alpha+j\beta \;,\; x^*=\alpha-j\beta$$

$$+\,|\; x=\alpha+j\beta$$

$$\text{Real } x=\frac{x+x^*}{2}$$

if $x[n]$: Real (حقیقی) $\rightarrow x_{cs}[n]=x_e[n]$

$$x_{cs}[n]=\alpha[n]+j\beta[n]$$

$\alpha[n]$ ← زوج است

$\beta[n]$ → فرد است

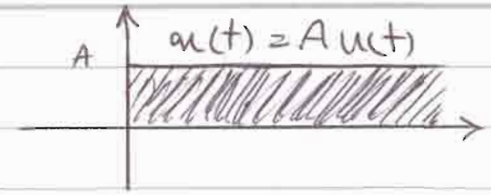
$$x[n]=je^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$x^*[n]=-je^{-j\frac{\pi}{2}n} \longrightarrow x^*[-n]=-je^{j\frac{\pi}{2}n}$$

انرژی و توان سیگنال:

$$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt \longrightarrow \text{انرژی سیگنال پیوسته}$$

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 \longrightarrow \text{انرژی سیگنال گسسته}$$

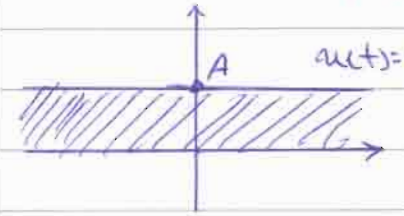


$$E_x = \lim_{T\to 0}\int_0^T A^2\,dt = \lim_{T\to 0} A^2 T = \infty$$

پس این سیگنال انرژی نیست.

$$P_x = \lim_{T\to \infty}\frac{1}{2T}\int_{\cancel{-T}}^{T}\left(A\,u(t)\right)^2 d(t) = \frac{A^2}{2} < \infty \rightarrow$$

سیگنال توان است.

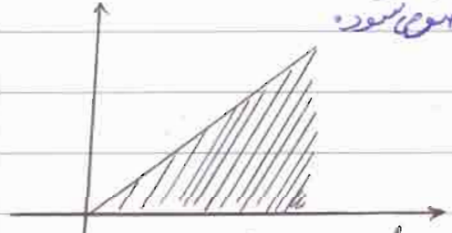


$$E_x = \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\,dt = A^2$$

نتیجه می‌بینیم که: سیگنال نصف شود ← توانش نصف می‌شود.

نکته: اگر سیگنال انرژی باشد ← توان صفر است.



$x(t) = r(t) = t\,u(t)$

$$\rightarrow E_x = \infty \qquad P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T t^2\,dt = \lim \frac{1}{2T}\cdot\frac{T^3}{3} = \infty$$

مثال) $x(t) = t^{-0.1}\,u(t-1)$

$$\rightarrow E_x = \lim_{T\to\infty}\int_1^T \tau^{-0.2} = \frac{1}{0.8}\,t^{0.8}\Big|_1^T = \lim \frac{T^{0.8}-1}{0.8} = \boxed{\infty}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_1^T t^{-0.2}\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,\frac{T^{0.8}-1}{0.8} = \boxed{0}$$

انرژی و توان سیگنال‌های متناوب:

در سیگنال متناوب انرژی بی‌نهایت است یعنی $E_x \to \infty$

$$P_x = \lim \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{\underline{T}} |x(t)|^2 dt$$

یعنی طول محدود T است

$$P_x = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{N-1} (x[n])^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2$$

مثال) $x(t) = A\cos\omega_0 t \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$E_x \to \infty$

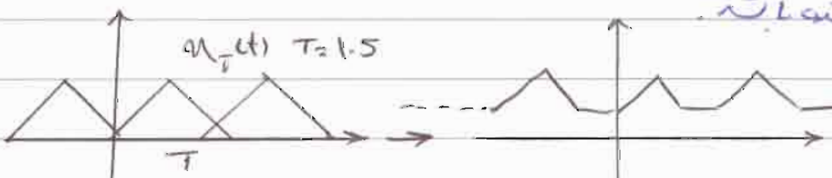
$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \underbrace{\cos^2\omega_0 t}_{\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2}} dt = \boxed{\frac{A^2}{2}}$$

متناوب کردن سیگنال‌ها:

$$x(t) = \sum_{k=\infty}^{+\infty} x_T(t-kT) = \dots + x_T(t+T) + x(t) + x_T(t-T) + \dots$$

سیگنال x(t) که با دوره تناوب T متناوب شده است.

سیگنال مجموع x(t) است که در نظر است با دوره تناوب T متناوب شده باشد.



مثال) آیا این سیگنال متناوب است؟

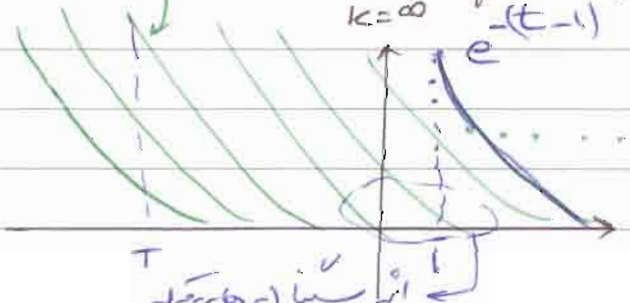
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(t-k)} u(t-k) =$$

$x_T(t) = ? \longrightarrow e^{-t} u(t)$

$e^{-t} u(t)$

$$x(t) = \sum_{k=\infty}^{\infty} x_T(t-kT)$$

$T = ? \Longrightarrow \boxed{T = 1}$



اثر سیگنال‌های قبلی

W

$$x(t)=\cos\frac{3\pi}{7}t \rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}}=\boxed{\frac{14}{3}}$$

$$x[n]=\cos\frac{3\pi}{7}t \rightarrow T=\frac{3\pi}{7}\times\frac{2}{2}=2\pi\times\frac{3}{14} \rightarrow$$ بصورت متناوب $N=14$

نکته: به $x[n]=e^{j\omega_0 n}$، monotone می‌گویند.

(مثال)

$$x[n]=\underbrace{e^{j\frac{\pi}{16}n}}\ \cos\frac{\pi}{17}n=[32,34]=\frac{32\times34}{②}=\boxed{17\times32}$$

ک.م.م ب.م.م

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{16}}=\boxed{32} \qquad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{17}}=\boxed{34}$$

چون $e^{j\theta}$ را می‌توان بصورت cos نوشت پس $e^{j\theta}$ همان ω_0 است بنابراین $\frac{2\pi}{\omega_0}$ (در حالت پیوسته)

تفاوت خاصیت تناوبی سیگنال‌های پیوسته و گسسته مثلثاتی:

$x(t)=e^{j\omega t} \rightarrow$ با افزایش فرکانس تناوب زیاد می‌شود.

تغییر ندارد.

$$x[n]=e^{j\omega n}\xrightarrow[\cos\omega n+j\sin\omega n]{}\begin{cases}x[n]=1 & \omega=0\\ x[n]=1 & \omega=2\pi\\ x[n]=1 & \omega=4\pi\end{cases}$$

برای ω مضرب زوج π که به آن فرکانس پایین (یا DC فرکانس است) می‌گویند.

$$x[n]=\begin{cases}x[n]=(-1)^n & \omega=\pi\\ x[n]=(-1)^n & \omega=3\pi\end{cases}$$

اگر ω مضرب فردی از π باشد، سیگنال منفی ۱ می‌شود، در نتیجه به آن فرکانس بالا می‌گویند.

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=e^{j3t}\\ x_2(t)&=e^{j4t}\end{aligned}\right\}$$ فرکانس x_2 بیشتر از فرکانس x_1 است.

۱) خطی بودن : برای خطی بودن لازم است دو شرط بررسی شود:

۱- همگن
۲- جمع پذیر

یعنی باید هر دو ویژگی را دارا باشد:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

یعنی جمع پذیر است!

$$k\,x_1(t) \longrightarrow k\,y_1(t) \to$$ یعنی همگن است

نکته: k نباید زیر مجموعه اعداد مختلط باشد یعنی: غیر مختلط $K\ C\ \notin$

شرایط لازم برای خطی بودن:

۱) ضابطه سیستم از مبدأ عبور کند. در نتیجه مداری که شرایط اولیه دارد حتماً غیرخطی است. $x(t) \longrightarrow y(t)=0 \Rightarrow$

مثال) $y(t)=x(t)$ خطی $y(t)=x(t)+C$ غیرخطی

۲) توان x و y در ضابطه سیستم 1 باشد.

$$\underset{\underset{K^2}{\downarrow}}{y(t)} = \underset{\underset{K}{\downarrow}}{x^2(t)}$$

۳) x و y ضابطه‌ی یک تابع خطی باشند:

$y(t)=\dfrac{dx}{dt}$ ✓ ⟶ با شرط اینکه x(t) پیوسته باشد

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ ✓ ⟵ انتگرال در گسسته

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ ✓

$y(t)=\cos(\cos(t))$ ✗

$y(t)=e^{x(t)}$ ✗

$y(t)=\ln(x(t))$ ✗

Year. Month. Date. سه‌شنبه ۱۱/۱

سیگنال جلسه سوم

مثال) این ضابطه خطی است

$$y(t)=\begin{cases} t\,x(t) & t>0 \\ 3\cos^4 t\,x^3(\sqrt{t-1}) & t\leq 0 \end{cases}$$

۱) $y(t)=x(f(t)) \longrightarrow$ خطی است یعنی $\alpha y(t)=\alpha x(f(t))$ مهم نیست

$f(t)$ چیست دقت کنیم. رابطه خطی است.

۲) $y(t)=f(x(t)) \longrightarrow$ غیرخطی است زیرا $\alpha y(t)\neq f(\alpha x(t))$

۳) $y(t)=f(t).x(t) \rightarrow$ خطی

۴) $y=g(t).x(f(t)) \rightarrow$ خطی

ضریب ورودی هر تابعی بر حسب زمان باشد اشکالی ندارد.

$y(t)=\sqrt{x(t)x(t-1)} \rightarrow$ این رابطه غیرخطی است زیرا اگر $\alpha x(t)$ شود $y(t)=|\alpha|y(t)$

$x(t)\rightarrow\alpha x(t)$ می‌شود پس غیرخطی است.

$$y(t)=\sqrt{\alpha^2 x(t)\,x(t-1)}=|\alpha|\sqrt{x(t)\,x(t-1)}$$

$$\rightarrow y(t)=\frac{x^2(t)}{x(t-1)} \rightarrow x(t)=x_1+x_2 \rightarrow y(t)=\frac{x_1^2(t)+x_2^2(t)+2x_1x_2}{x_1(t-1)+x_2(t-1)}$$

$$\overset{?}{=}\frac{x_1^2(t)}{x_1(t-1)}+\frac{x_2^2(t)}{x_2(t-1)}$$

مثال ۵

$$y_1[n] = 2x_1[n] + x_1[n-1] + n$$

$$y_2[n] = 2x_2[n] + x_2[n-1] + n$$

$$\underbrace{y_1 - y_2}_{y[n]} = 2\big(\underbrace{x_1[n] - x_2[n]}_{x[n]}\big) + \big(\underbrace{x_1[n-1] - x_2[n-1]}_{x[n-1]}\big)$$

$y[n] = 2x[n] + x[n-1] \longrightarrow$ غیرخطی است.

سیستم غیرخطی = سیستم خطی + $\underbrace{f(n)}_{\text{تابعی از } n \text{ یا } t}$

که n ← گسسته است و t پیوسته است.

هر سیستمی که حاصل جمع یک سیستم خطی با یک تابع از n یا t باشد را سیستم غیرخطی می‌گویند

$$y[n] = \underbrace{2x[n] + x[n-1]}_{\text{سیستم خطی}} + \underbrace{n}_{f(n)}$$

مثال $\Rightarrow y(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + \sum\limits_{k=-\infty}^{n} & n: \text{odd} \\ \\ \frac{n-1}{3} & n: \text{even} \end{cases}$

زوج

$$\rightarrow y[n] = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{n} x(k) & n: \text{odd} \\ \\ 0 & n: \text{even} \end{cases} + \begin{cases} \frac{n}{2} & n: \text{odd} \\ \\ \frac{n-1}{3} & n: \text{even} \end{cases}$$

فرد

if $a=1$ $\forall b$ $\rightarrow$ TI

اگر ضریب t در x مساوی ۱ شود آنگاه صورت شرط برقرار می‌شود.

$y(t)=x(\underline{2}t)$ T.V.

$y[n]=x[\underline{-}n]$ T.V.

$y(t)=x(t^2)$ T.V.

$y(t)=x(\cos t)$ T.V.

$y(t)=x(\sqrt[3]{t})$ T.V.

$y(t)=\begin{matrix}\text{even}\\ \text{odd}\end{matrix}\{x(t)\}$ T.V.

$y(t)=x(\underline{f(t)})$ $\rightarrow$ اگر $f(t)$ خط با شیب ۱ باشد $\rightarrow$ TI

o.w TV

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)\geqslant 0 \\ 2x(t)-1 & x(t)<0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ چون ضریب ۱ است بنابراین TI است

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & t\geqslant 0 \\ 2x(t) & t<0 \end{cases} \rightarrow$$

T.V. ← مرجع زمان تغییر می‌کند

شرط به زمان وابسته باشد ← T.V

شرط به ورودی بستگی داشته باشد ← غیرخطی

شیب ۱ باشد و اگر عدد بود هر چه باشد سیستم T.I می‌شود.

$y(t)=\int_{1}^{t-1} x(\tau)\,d\tau$ * کران ثابت غیر بی‌نهایت باشد ← T.V

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau$ * محدوده بی‌نهایت است ← T.I

$y(t)=\int_{t-1}^{t+2} x(\tau)\,d\tau$ * محدوده تابعی از t است ولی t با شیب ۱ است ← T.I

$y[n]=\sum_{k\to\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \boxed{T.I}$

هر سیستم بی‌حافظه علّی

$y[n]=\sum_{k=-n}^{+\infty} x[k]$ * ← T.V.

$y(t)=\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(2\tau)\,d\tau \longrightarrow 2\tau=\eta \rightarrow 2\,d\tau=d\eta \rightarrow d\tau=\frac{1}{2}\,d\eta$; $\frac{t}{2} \rightarrow \frac{t}{2}=\eta$

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}x(\eta)\,d(\eta) \longrightarrow \boxed{T.I}$

$y[n]=\sum_{k=-n}^{+\infty} x[-k] \longrightarrow \boxed{-k=m} \rightarrow y[n]=\sum_{m=n}^{-\infty} x[m]$ T.I

3) حافظه (memory): به سیستمی حافظه‌دار می‌گویند که خروجی به زمان‌های مختلف ورودی (گذشته یا آینده) وابسته باشد.

۴) علّی (سببی) [causal] : خروجی که فقط به ورودی حال یا گذشته وابسته باشد.

$y(t) = x(-|t|) \longrightarrow$ (علّی) ـ حافظه‌دار

چه + و چه - باشد t ـ می‌شود که گذشته است.

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha \longrightarrow$ علّی ـ حافظه‌دار

هر وقت منفی‌تر scale داشتیم حافظه‌دار است که

$y(t) = \int_{t-1}^{t+2} x(\underbrace{\tau-3}_{\eta})\,d\tau \qquad t-3=\eta \longrightarrow d\tau = d\eta$

$= \int_{t-4}^{t-1} x(\eta)\,d\tau \longrightarrow$ علّی ـ حافظه‌دار

اگر زمان حال ورودی از خروجی کوچکتر باشد علّی است.

$y[n] = x[(\frac{1}{2})^n] \rightarrow y(-1) = \underline{x(2)} \rightarrow$ (علّی نیست)

$y(t) = x(t) + x(0) \longrightarrow y(-1) = x(-1) + \underline{x(0)}$ (علّی نیست)

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty = t-1} x(\tau)\,u(t-1-\tau)\,d\tau$

$\hookrightarrow t-1-\tau > 0 \rightarrow \boxed{t-1 > \tau} \rightarrow$ به ازای این مقدار انتگرال صفر نمی‌شود.

چون حد انتگرال تبدیل به $t-1$ و $-\infty$ شد پس علّی است زیرا بعد از $t-1$ همه انتگرال صفر می‌شود زیر تابع پله داریم.

آیا تمام سیستم‌های بدون حافظه علّی هستند؟ yes ـ علّی یعنی وابستگی به آینده ندارد.

حال

آیا تمام سیستم‌های علّی بدون حافظه هستند؟ No

شرط لازم و کافی برای علّی بودن یک سیستم خطی آن است که تا زمانی که ورودی صفر است خروجی صفر باشد.

سؤال 47 (آزاد - ۸۰)

$$y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-2) & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

خطی ✓ - علّی ✓ - TI ✗

سؤال نمونه :

$\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\sqrt[3]{\alpha})\,d\alpha$ خطی و غیر علّی است.

$\sqrt[3]{\alpha}=\tau \rightarrow \alpha=\tau^3 \rightarrow d\alpha=3\tau^2\,d\tau$

غیر علّی است

$\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{t}} 3\tau^2 x(\tau)\,d\tau \rightarrow y(-8)=\int_{-\infty}^{-2} —$ $\rightarrow -8(-2)$

سؤال نمونه : خطی ✗ - TI ✗

$$y[n]=\underbrace{\underset{\times k}{x}[0]\,\underset{\times k}{x}[n]}_{k^2}+x[1][\underset{n-1}{\bullet}]$$

خطی نیست چون اگر ورودی k برابر شود خروجی k^2 برابر می‌شود

T.I چون ضرایب به ضرایب ثابت است شیفت پذیر نیست.

مثال) علّی ✗ - خطی ✗ - TI ✗ - حافظه ✓

$$y(t)=\begin{cases} x(t)+x(t-1) & x(-t)\leqslant 0\\ x(t)-x(t-1) & x(-t)>0\end{cases}$$

سؤال 293 (سال 87):

$y(t)=\int_{-\infty}^{-t} x(-\tau)\,d\tau \rightarrow -\tau=\eta \rightarrow -d\tau=d\eta$

$\rightarrow y(t)=\int_{+\infty}^{t} -x(\eta)\,d\eta=\int_{t}^{+\infty} x(\eta)\,d\eta$

خطی ✓ - علّی ✗ - T.I ✓

$\ln(1)=0$ $\ln(0)=-\infty$

$\ln(2)=0.3$

$y(t)=\dfrac{1}{x(t)+2}$ ناپایدار است زیرا اگر حتی ورودی محدود باشد ولی نزدیک 2- باشد خروجی

نامحدود می‌شود پس ناپایدار است.

$y(t)=\ln|x(t)| \rightarrow$ ناپایدار $\longleftarrow$ $x(t)\simeq 0 \rightarrow y(t)=\infty$

$y(t)=\dfrac{x(t)}{t+\frac{1}{2}}$ ناپایدار است $\leftarrow$ $t=-\frac{1}{2}$ $\longleftarrow$ ناپایدار

$y[n]=\dfrac{x[n]}{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow$ پایدار چون n گسسته است هیچ وقت $n=\frac{-1}{2}$ نمی‌شود پس پایدار

$y(t)=\dfrac{dx}{dt} \longrightarrow$ ورودی محدود بدیم خروجی ناپایدار $\rightsquigarrow u(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} \delta(t)$

$y[n]=n\,x[n]$ ناپایدار

$y(t)=\dfrac{\sin(x(t))}{x(t)}=\operatorname{sinc}\left(\dfrac{x(t)}{\pi}\right) \rightsquigarrow |x(t)|<M$

$\hookrightarrow |y(t)|<1$ پایدار

$y[n]=\sum\limits_{k=n-3}^{n+5} x[k] \longrightarrow |x(n)|<A \rightarrow |y(n)|<9A$

$n+5-n+3=\boxed{8+1=9} \longrightarrow$ وقتی اگر n ضریب داشته باشد دیگر n ها از هم کم نمی‌شوند یک n باقی می‌ماند که با ∞ شدن خروجی ∞ می‌شود و ناپایدار می‌شند

$y[n]=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$ ناپایدار

حل مثال ① علی است زیرا به ازای $t > |x(t)|$ سه $y(t) = x(-t)$ یعنی مربوط به گذشته

می‌شود $|x(t)|$ عددی مثبت است. پس در ضابطه دوم نمی‌توان ± را منفی فرض کرد چون

$|x(t)| < t$ در هر صورت بگیریم گفته $y(t) = x(-t)$ به ازای tهای منفی هم با زمان علی است

هم علی است و هم حافظه‌دار - پایدار نیست، غیرخطی

جلسه چهارم

معکوس پذیری و معکوس ناپذیری:

سیستم های معکوس پذیر: سیستمی که به ورودی متمایز، خروجی متمایز بدهد معکوس پذیر است:

ورودی متمایز → خروجی متمایز

سیستم معکوس ناپذیر: دو ورودی متمایز یک خروجی یکسان بدهد سیستم معکوس ناپذیر است:

دو ورودی متمایز → خروجی یکسان

توابع زوج معکوس ناپذیرند.

مثال توابع با خاصیت زوج:

$y(t) = x^2(t) \longrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y(t) = 1$

اصطلاحاً توان‌های زوج به علامت حساس نیستند پس معکوس پذیر نیستند

مثال تابع متناوب:

$$y(t) = \sin(x(t)) \longrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = k \\ x_2 = k + 2\pi \end{matrix}\right\} \rightarrow y_1 = y_2$$

خروجی به صورت تابعی متناوب از ورودی است بنابراین معکوس پذیر نیست

نکته: مشتق گیری در گسسته معکوس پذیر $y[n] = x[n] - x[n-1]$

نیست.

نکته: سیستم های از جنس زیر همواره معکوس ناپذیر است:

$$y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2) + \dots + k_n x(t_n - t_n)$$

روش های بررسی معکوس پذیری و معکوس ناپذیری: مشخص روش برای اینکار وجود ندارد و بسته به نوع سؤال باید راه ها را اعمال کنیم تا جواب بگیریم:

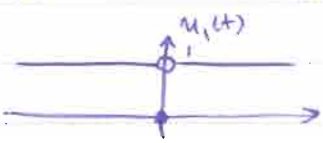
۱) دادن ورودی های متمایز و یکسان شدن خروجی: برای مثال باید

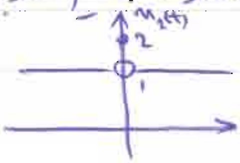
k و $-k$ (عدد ثابت) می دهیم
(ضربه / $\delta(t), u(t)$
$\delta[n], u[n]$
(ضربه شیفت یافته $\delta[n-n_0]$

۲) اگر خروجی در بعضی از زمان ها به ورودی وابسته نباشد

سیستم حتما معکوس ناپذیر است:

$y(t) = t\,x(t)$ در لحظه $t=0$ تا به ورودی هر عدد بدهیم خروجی صفر است



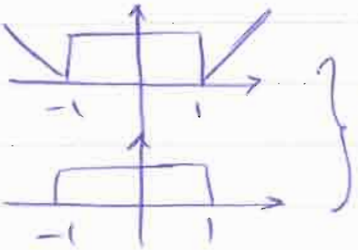


$y(t) = \cos\frac{t}{3} \cdot x(t)$ در لحظاتی که $\cos\frac{t}{3} = 0$ مقدار خروجی از ورودی متمایز می شود.

$$t = \overbrace{(2k+1)\frac{3\pi}{2}}^{A} \longleftarrow \frac{t}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

به ازای $t = A$ معکوس ناپذیر است

مثال) $y(t) = x(\sin(t))$　　به ازای هر t که بدهیم فقط خروجی بین $-1 < x < 1$

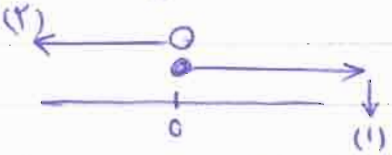


استفاده می‌شود. حذف نمونه داریم. برای مثال: خروجی آن دو تکه است

مثال) $y[n] = x[n] \cdot u[n] \longrightarrow$ سمپل‌های منفی حذف شدند ← معکوس ناپذیر

مثال) $$y(t) = \begin{cases} x(t-2)^{(1)} & t \geq 2 \\ 0 & |t| < 2 \\ x(t+2)^{(۲)} & t \leq -2 \end{cases}$$

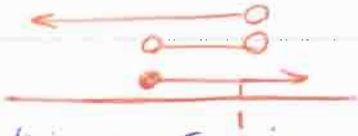
معکوس پذیر است زیرا همه زمان‌های ورودی در ضابطه دخیل شدند یعنی



تمام زمان‌های ورودی در خروجی نقش داشته‌اند:

مثال) $$y(t) = \begin{cases} x(t-1)^{(1)} & t \geq 1 \\ t\,x(t)^{(۲)} & 0 \leq t < 1 \\ x(t+1)^{(۳)} & t < 0 \end{cases}$$

سراسری 78 : سؤال ۲ :



معکوس پذیر است. همه زمان‌ها استفاده شده است.

$$y(t) = \overset{\frac{1}{2}y(8)}{\cancel{x(2)}} + x(t-6) \longrightarrow y(8) = 2x(2) \longrightarrow$$ معکوس پذیر

$$\longrightarrow x(t-6) = y(t) - \frac{1}{2}y(8) \rightarrow x(t) = y(t+8) - \frac{1}{2}y(8)$$

$$y(t) = -x(2) + x(t-6) \longrightarrow y(8) = -x(2) + x(2) = 0$$

← یعنی $y(8)$ صرف نظر از اینکه $x(2)$ چیست صفر می‌شود یعنی $\underline{x(2)}$ حذف شده

پس معکوس ناپذیر است.

$$y[n] = x_{(2)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n = 2k \\ 0 & n \neq 2k \end{cases}$$

$y[n] = x[2n]$: معکوس پذیر است به ازای ورودی فرد صفر اضافه می‌کند

خطی ـ TV ـ غیرعلی ـ حافظه دار ـ پایدار

$y(t) = x(t-2) + x(2-t)$ ④

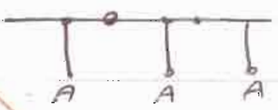
$$\left.\begin{aligned} y(t) &= x_o(t) \\ y(t) &= x_e(t) \end{aligned}\right] \longrightarrow \text{معکوس ناپذیر}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin t \\ x_2 &= 2\sin t \end{aligned}\Bigg\} \rightarrow y_1 = y_2 = 0$$

④ $\rightarrow y(t) = \underbrace{x(t-2) + x(-(t-2))}_{\text{تعریف زوج}} \rightarrow y(t) = 2x_e(t-2)$

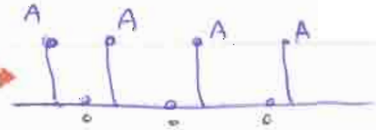
↳ معکوس ناپذیر

$y[n] = \max[x[n], x[n-1]]$



به ازای هر مقدار A مقدار ماکزیمم صفر است.

$y[n] = \min[x[n], x[n-1]]$ → ح ـ ل



به ازای هر مقدار A خروجی صفر می‌شود، چون بین A و ۰ min را انتخاب می‌کند. زیرا این دو ورودی که به دلخواه انتخاب کردیم شرط معکوس پذیری را نقض کرد

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,u(\tau+1)\,u(2t-\tau)\,d\tau$$

$-1<\tau \qquad \tau<+2t \quad \rightsquigarrow \quad -1<\tau<2t$

$$\rightarrow \; = \begin{cases} \int_{-1}^{2t} x(\tau)\,d\tau & t>-\frac{1}{2} \\ 0 & t<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,u(\tau+1)\,\&\,u(3-\tau)\,d\tau=\boxed{\int_{-1}^{3} x(\tau)\,d\tau}$$

معکوس ناپذیر

(س)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)\,d\tau \rightarrow e^{t}y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)e^{\tau}\,d\tau$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق}} \cancel{e^{t}}\,y(t)+\cancel{e^{t}}\,y'(t)=\cancel{e^{t}}\,x(t)$$

$$\rightsquigarrow x(t)=y(t)+y'(t) \longrightarrow$$ ورودی برحسب خروجی بدست آمد سیستم معکوس پذیر

حل از دیدگاه دیگر

$$\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\,x(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau=x(t)*\underbrace{e^{-t}u(t)}_{h(t)}$$

$$h(t)=e^{-t}u(t) \longrightarrow H(s)=\frac{1}{s+1} \rightarrow H_I(s)=s+1$$

$$\longrightarrow h_I(t)=\delta'(t)+\delta(t) \qquad x(t)\longrightarrow\boxed{h_I(t)}\longrightarrow x'(t)+x(t)$$

معکوس پذیر

نکته: اگر سیستم LTI بود هم H(s) و هم H(ω) ؛ اگر H(s) آن صفر محدود نداشت

هم‌شکل ۳۱

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}x[k]$$

$$\rightarrow y[n]=\frac{1}{2}^{n}\sum_{k-\infty}^{n}2^{k}\,x[k]$$

$$\rightarrow\begin{cases}2^{n}y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] & ①\\ 2^{n-1}y[n]=\sum_{k=\infty}^{n-1}x[k] & ②\end{cases}$$

در اینجا، 2^{n-1} را محاسبه می‌کنیم!

$$① - ② \rightarrow \cancel{2^{n}}y[n]-\cancel{2^{n-1}}y[n-1]=\cancel{2^{n}}x[n]$$

$$\rightarrow y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

چون توانستیم x را برحسب y بدست آوریم سیستم معکوس پذیر است.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n-k]x[k]=x(k)*\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]}_{h[n]}$$

$$a^{n}u[n]\rightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad H_{I}(z)=1-\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$y(t)=\int_{t-5}^{t}x(\tau)\,d\tau-\int_{t}^{t+5}x(\tau)\,d\tau$$

چون LTI است مشتق می‌گیریم.

زیرا انتگرال $x(\tau)$ خلاف ضریب t ها است ← LTI.

$$y'(t)=[x(t)-x(t-5)]-[x(t+5)-x(t)]$$

سوال 224: سیستم ۲: تغییرناپذیر با زمان است چون ضریب $n=1$ است. معکوس ناپذیر است. سیستم ۱: معکوس پذیر است. گزینه ۳ صحیح است.

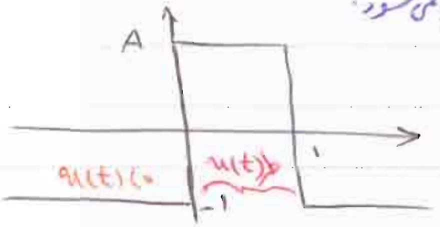
در سیستم دو اگر دو ورودی متفاوت با دوره تناوب ۷ بدهیم خروجی یکی می‌شود.

سوال 225:

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)<0 \\ x(t-2) & x(t)\geqslant 0 \end{cases}$$

تغییرناپذیر با زمان است

ضریب t یک است. خطی نیست با تابع تبدیل می‌شود.

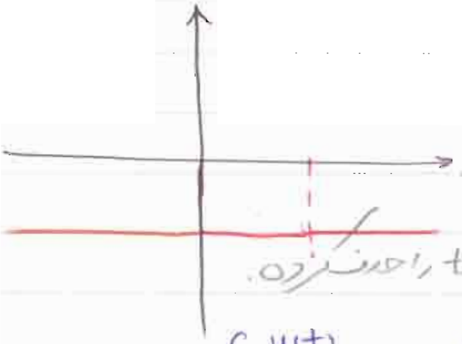


TV ، NL - حافظه دار - علی

در اینجا هیچ فرقی نمی‌کند A چقدر باشد

$\boxed{t-2}$

خروجی یکی می‌شود



نقطه $x(t)\geqslant 0$ ورودی از دو بعد می‌شود ← یعنی $t=1$, $t=0$ را حذف کرده.

$$x(t)=\begin{cases} y(t) & x(t)<0 \\ y(t+2) & x(t+t)\geqslant 0 \end{cases}$$

سوال 94: خطی، علی، TI، پایداری، معکوس پذیر؟

$$y(t)=\frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$$

حافظه دار است، خطی نیست، علی هست (چون به آینده مربوط نیست)

TI نیست چون ضریب $t=2$ است، چون ورودی در مخرج است ناپایدار است.

:253 شکل بکشیم

$y(t) = f(x(t))$ → TI و بی‌حافظه

$$\begin{cases} y(t) = f(t) \cdot x(t) \\ f(t) \neq 0 \quad \forall t \end{cases}$$

خطی، بی‌حافظه

$\rightsquigarrow$ معکوس پذیر

:238

$y[n] = \dfrac{x[n-1]}{x[1]}$ معکوس پذیر نیست، غیرعلّی، TV، غیرخطی

ناپایدار چون کسری

sign حساس نیست.

به ازای ورودی منفی، بی‌نهایت دارد.

TV ← چون $x[1]$ دارد

کسری ← غیر خطی

$x[n] = 2, -2 \rightarrow y[n] =$ یکی می‌شود → معکوس ناپذیر

:۳۳۰

$$y[n] = \sum_{k=\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-2k] \Rightarrow \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n:\text{even} \\ 0 & n:\text{odd} \end{cases}$$

TI نیست، معکوس پذیر هست.

زمان دقیق $\xrightarrow{\quad}$ $n = 2K \rightarrow k = \frac{n}{2}$

$$y[n] = \cdots + x[-2]\,\delta[n+4] + x(-1)\,\delta[n+2] + x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-2] + \cdots$$

سطر :364

هم زوج را شامل شده هم فرد

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + x(-t) & t > 0 \Rightarrow 2x_e(t) \\ x(t) - x(-t) & t < 0 \Rightarrow 2x_o(t) \end{cases}$$

→ خطی است.

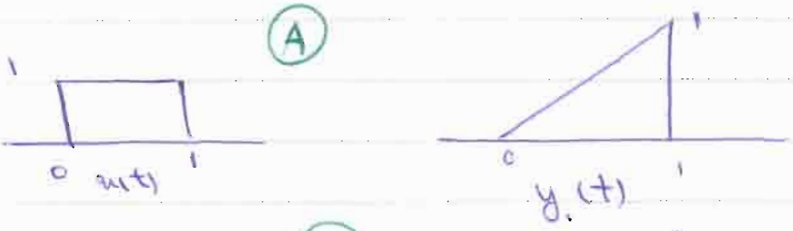
$$\begin{cases} y(1) = x(1) + x(-1) \\ y(-1) = x(-1) - x(-1) \end{cases}$$

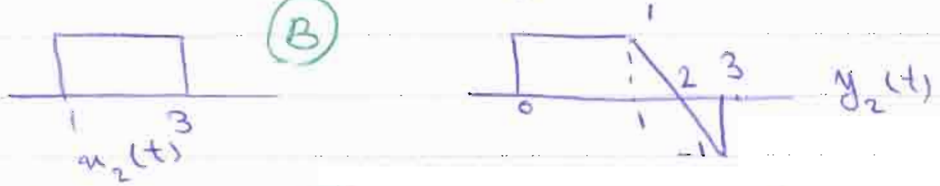
← تمام زمان‌ها پوشش داده می‌شود معکوس پذیر

هر وقت گفت سیستم خطی بدون حافظه است باید به صورت $y(t)=f(t)x(t)$ در بیاوریم.

مثال) $y(t)=f(x(t)) \longrightarrow$ TI، بدون حافظه، علّی، معکوس پذیر است به شرط آنکه f یک به یک باشد.

مثال)





پاسخ یک سیستم خطی به سه ورودی مختلف داده شده است؟ موارد زیر را چک کنید.

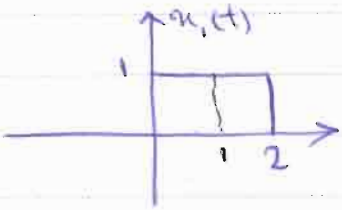
1. TI 2. علّی 3. حافظه

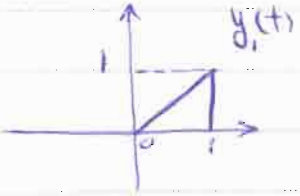
وقتی سیستم خطی است یعنی همگنی و جمع پذیری آن مفروض است.

فرض کنیم TI باشد پس از لاپلاس گرفتن x_1 و y_1 می توان H(s) را بدست آورد، H(s) در x_2 ضرب شود باید $y_2(t)$ را بدهد. ولی این روش مناسب نیست

① $x_3(t)=x_1(t-1)$ و ② $y_3(t)\neq y_1(t-1)$

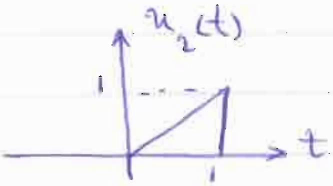
$$x_4(t) = x_1(t) + 2x_3(t) \longrightarrow y_4(t) = y_1(t) + 2y_3(t)$$





سوال:
سیستم خطی و بدون حافظه است.

$y_2(t)$ کدام است؟



$y_2(t) = ?$

خطی بدون حافظه $\longrightarrow y(t) = f(t)\,x(t)$

از روی شکل می‌توان $f(t)$ را بدست آورد. به ازای

$y(t) = t \longleftarrow 0 < x < 1.$

$\longrightarrow f(t) = t$

$1 < x < 2 \longrightarrow y(t) = 0$

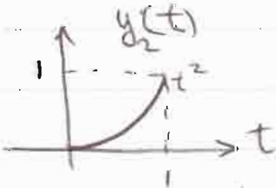
$\longrightarrow f(t) = 0$

$$\longrightarrow f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

در x_2 داریم $\quad 0 < x < 1 \longrightarrow x = t$

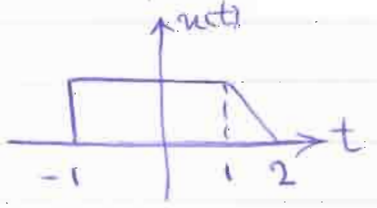
در x_1 " $\quad 0 < x < 1 \longrightarrow f(t) = t$

$$y_2(t) = t \times t = t^2$$



چون ضریب t است یعنی $y(t)$ متغیر با سیستم است

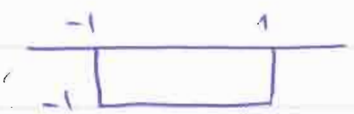
پس سیستم TV است.



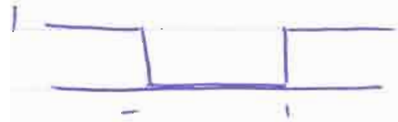
مثال) صفحه‌ی دیگر

پاسخ یک سیستم TI بدون حافظه به $x_1(t)$، $y_1(t)$ است پاسخ سیستم به $g_2(t)$ کدام است؟

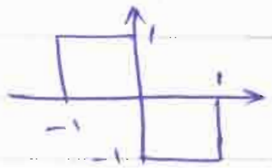
۱/



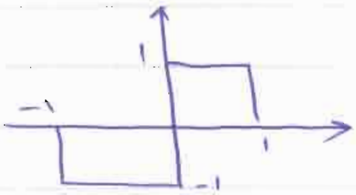
۲/



۳/



۴/



$y(t) = f(x(\overset{\overset{0}{\downarrow}}{t})) = f(0) = 1] \longrightarrow$ در شکل داده است

$y_1(t) = f(x_1(t)) \Rightarrow y_1(0) = f(x_1(0)) = \boxed{f(0) = 1}$

$x_2(t) \longrightarrow |t|>1 \longrightarrow x_2(t) = 0 \rightarrow y_2(t) = f(x_2(t)) =$

$= f(0) = 1$ ← فقط گزینه ۲ درسته که این شرایط را داریم. در واقع شرایط

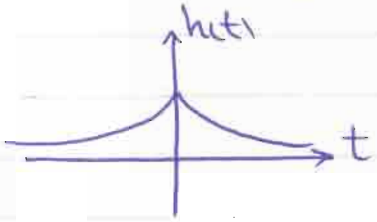
$$f(0) \leftarrow \begin{cases} x_1 \xrightarrow{t=0} = 0 \\ x_2 \xrightarrow{|t|<1} = 0 \end{cases}$$

مدار مشتق گیر حتما حافظه دارد، حتما سلف و خازن دارد.

TI بدون حافظه ← مقاومتی که مقاومت ها اعداد ثابت هستند.

همگن یعنی ورودی n برابر شود، خروجی هم n برابر شود.

مثال) پاسخ ضربه یک سیستم بدون حافظه به صورت زیر است؟



۱) می‌تواند LTI باشد

۲) می‌تواند خطی باشد

۳) می‌تواند TI باشد

۴) حتماً غیرخطی و TV است.

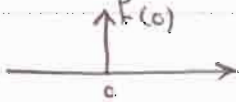
پاسخ ضربه خاص سیستم خطی نیست، به هر سیستم می‌توان ورودی ضربه داد.

فرض کنیم خطی باشد: ← $y(t) = f(t)x(t)$

چون شکل گویای این $\rightarrow h(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \rightarrow$

نیست ← لزوماً غیرخطی است. یعنی باید در مبدا ضربه‌ای به اندازه $f(0)$ داشته

باشیم ←



پس قطعاً گزینه ۱ و ۲ رد می‌شود.

فرض کنیم سیستم TI باشد: بدون حافظه $\rightarrow y(t) = f(x(t))$

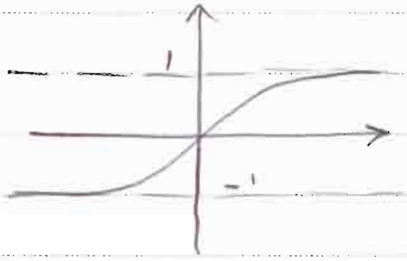
$$\rightarrow h(t) = f(\delta(t)) \xrightarrow{TI} \begin{cases} f(0) & t>0 \\ f(0) & t<0 \end{cases} \Leftarrow h(t) = f(0) \quad t\neq 0$$

ولی در اینجا $h(t)$ به ازای $t\neq 0$ برابر نشده است پس الزاماً TI نیست.

$$h(t) = f(\delta(t)) \xrightarrow{t\neq\ \delta(t)=0} h(t) = f(0) \quad t\neq 0$$

$$y(t) = \frac{\cancel{e^{-t/2}}\,(e^{t/2} - e^{-t/2})}{\cancel{e^{-t/2}}\,(e^{t/2} + e^{-t/2})}\, x(t) = \tanh\left(\frac{t}{2}\right) x(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} Sh\theta = \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \\ ch\theta = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{sh\theta}{ch\theta} = tgh\theta$$



پایدار است ← خروجی محدود است ←

if $|x(t)| < M \longrightarrow |y(t)| < k \longrightarrow$ پایدار است

برای ورودی های محدود خروجی های محدود داریم .

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

سؤال 375 سراسری 89 :

کدام گزینه نادرست است ؟

۱- علی ✓ - پایدار ✓ ۲- غیرخطی ✓ - TI ✓

۳- TI ✓، معکوس ناپذیر ✓ ۴- معکوس پذیر ✗ - حافظه دار ✓

گزینه ۴ صحیح است .

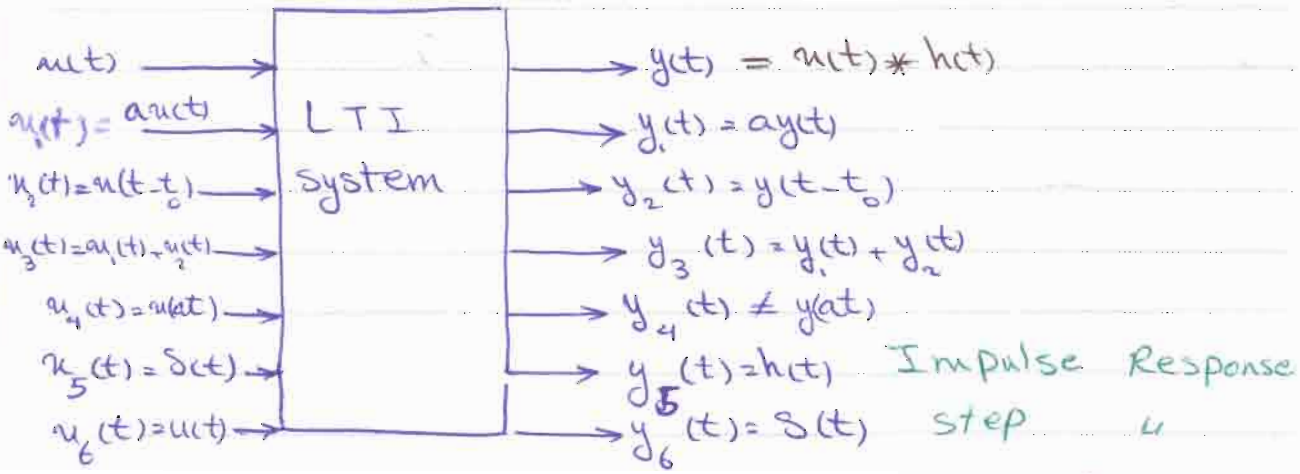
$$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[0] \geq 0 \\ -x[n] & x[0] < 0 \end{cases}$$

حافظه دار
NL
غیر علی

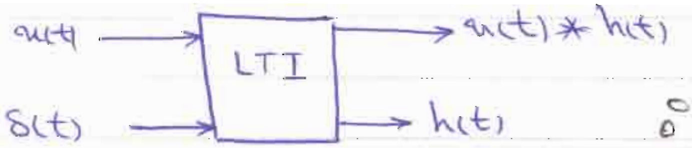
سؤال ۴۰۰-

۳۹

کلیِ سیستم‌های LTI :



تعریف کانولوشن:



° type 1 : Continue version

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

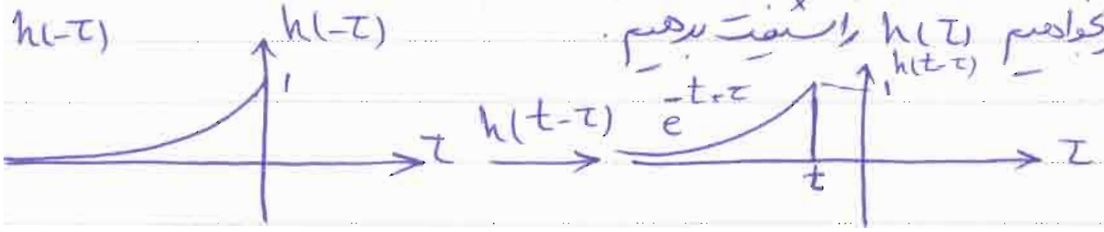
زمان خروج

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

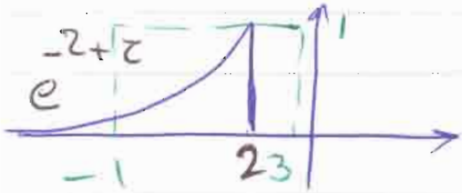
نکته: اگر کانولوشن را در یک لحظه خواستیم بهتر است از روش ترسیم استفاده کنیم اگر کانولوشن کلی بخواهیم از انتگرال‌گیری انجام می‌دهیم. (حالت دوم L Z است)

حال اگر بخواهیم $h(\tau)$ را شیفت بدهیم.



$$h(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow h(t\tau) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$$

$$\tau < t \rightarrow t-\tau > 0$$



$$\longrightarrow y(2) = \cancel{e}\int_{-1}^{2} (1)e^{-2+\tau}d\tau$$

$$= e^{-2}\int_{-1}^{2} e^{\tau}d\tau = e^{-2}(e^{2}-e^{-1}$$

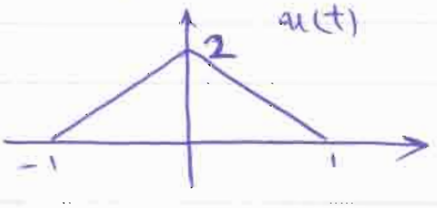
$$= \boxed{1-e^{-3}}$$

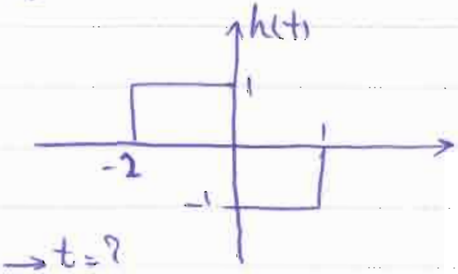
جواب ها یکسان شد. فرقی نمی‌کند کدام شکل را شیفت می‌دهیم ولی

شکلی را انتخاب می‌کنیم که ساده‌تر است.

سؤال 176، سال 84: ورودی $(x(t))$ و پاسخ ضربه $(h(t))$ یک سیستم LTI به

شکل زیر است. به ازای چه مقدار t خروجی ماکزیمم است، خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید؟





$y(t) = ?$ $\quad$ $y(t): \max \rightarrow t = ?$

مثال

$x[n] = 2^{-|n|}$ ، $h[n] = 2^{-|n|}$ $\quad y[-1] = ?$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} \, 2^{-|n-k|}$$

$$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} \, 2^{-|-1-k|} =$$

$$= \sum_{k=\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \left(\frac{1}{2}\right)^{|1+k|} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \frac{1}{2}^{-(1+k)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \underbrace{2 \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2k}} + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}} \longrightarrow$$ باهم برابرند

$$= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

$$= 2 \frac{1/4}{\underline{1-1/4}_{\,*}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{4+3+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$* = \dfrac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}}$ $\qquad \text{قدر نسبت} = \dfrac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}}$

خواص کانولوشن:

فرض $\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$$x[2n] * h[2n] \neq \frac{1}{2} y[2n]$$

3) مشتق:

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

$$y^{(m+n)}(t) = x^{(n)}(t) * h^{(m)}(t)$$

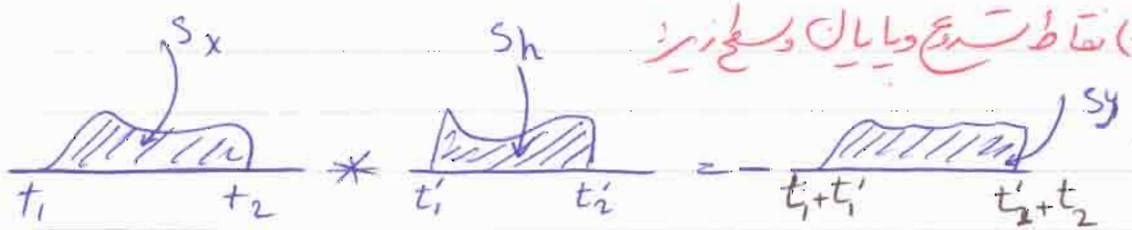
$$y^{4}(t) = x''(t) * h''(t) = x^{(4)}(t) * h(t) = x(t) * h^{(4)}(t)$$
$$= x'''(t) * h'(t)$$

4) انتگرال گیری

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau * h(t) = x(t) * \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

5) کانولوشن پالس های پیوسته (صفحه بعد)

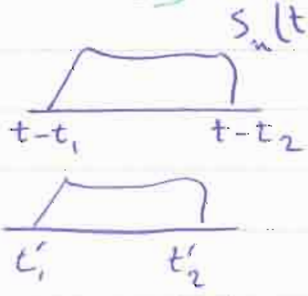
5) نقاط شروع و پایان و سطح زیر



توسعه $\boxed{S_y = S_x \cdot S_h}$ شروع $t = t_1 + t'_1$ پایان $t = t_2 + t'_2$

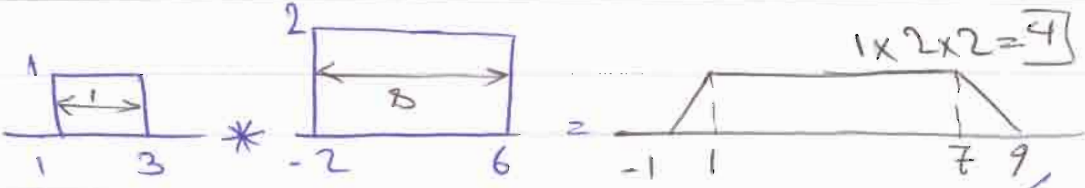
گسسته $\Rightarrow \Sigma y = \Sigma x \cdot \Sigma h$ مهم است. سؤال 290

اثبات

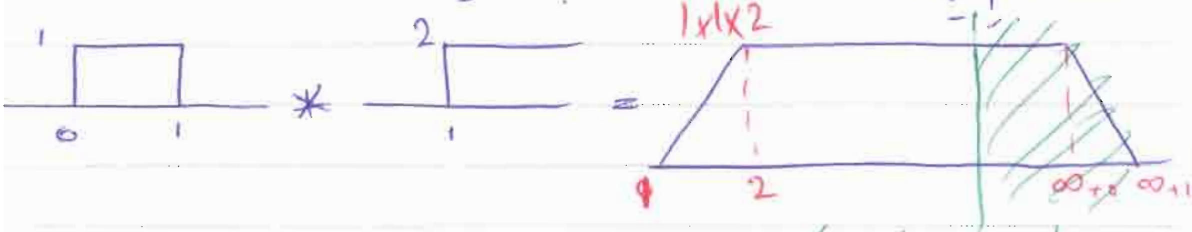


$$\times \longrightarrow \left.\begin{matrix} t - t_1 > t'_2 \\ t - t_2 < t'_1 \end{matrix}\right\} \rightarrow S_x(t-t_1)\,h(t) = 0$$

مثال)

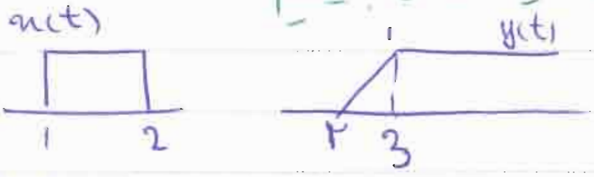


فرض کنیم یکی از شکل های ورودی تا بی نهایت ادامه دارد

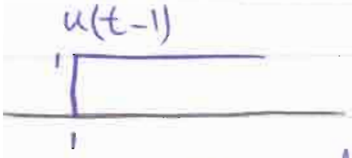


از اینجا به بعد بی نهایت است نمی بینیم

مثال)



$h(t)=?$

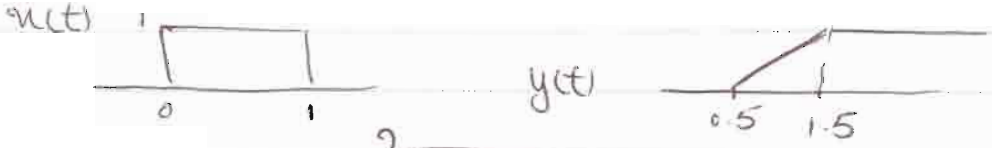


$h(t)=u(t-1)$

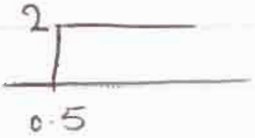
سوال 252: سراسری 86:

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0<t\leqslant 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0.5\\ 2(t-0.5) & 0.5<t\leqslant 1.5\\ 2 & t>1.5\end{cases}$$

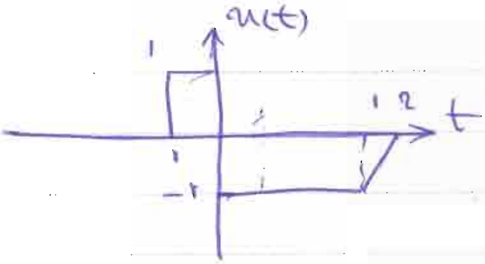


$h(t)=$



$h(t)=2u(t-0.5)$

سؤال 73: سراسری 81:



$$h(t)=e^{-t}\delta(t)+u(t-1)$$

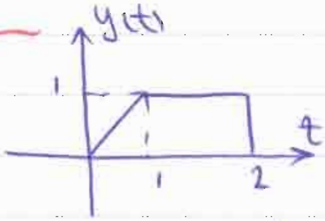
$$=\delta(t)+u(t-1)$$

$$\rightarrow y(t)=x(t)+\int_{-\infty}^{t-1}x(\tau)d\tau$$

$$y(\tfrac{3}{2})=x(\tfrac{3}{2})+\int_{-\infty}^{\frac{3}{2}-1}x(\tau)d\tau=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}=0]$$

$$y(\infty)=x(\infty)+\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)d\tau=0-\frac{1}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

→ محاسبه شده



$y(t)=x(t)*h(t)$

$$y_1(t)=x(-2t)*h(-2t)=\frac{1}{2}y(-2t)$$

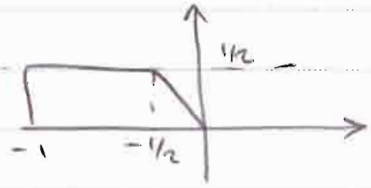
$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{t+t}x(\tau)d\tau\times\frac{dh(t)}{dt}$$

$$y_3(t)=x(-t+3)*h(-t-2)$$

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*\frac{d(h(t+3))}{dt}=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*\frac{dh(t)}{dt}*\delta(t+3)$$

$$=x(t)*h(t+3)=y(t+3)$$

$y_1(t)=1/2\,y(-2t)$



$$y_3(t)=z(-t)=y(-t+1)$$

$$z(t)=x(t+3)*h(t-2)=y(t+1)$$

Year Month Date ( )

$h(2(t-\frac{3}{2}\tau))$

*حل:

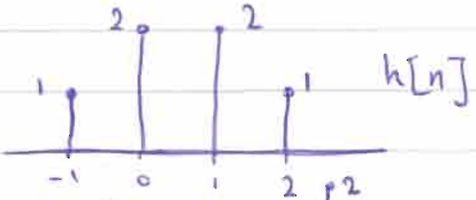
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(2\tau)\, h(2t-3\tau)\, d\tau$$

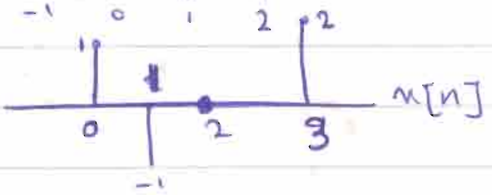
$\frac{3}{2}\tau = \eta$

$\frac{3}{2} d\tau = d\eta$

$$\longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tfrac{4}{3}\eta)\, h(2(t-\eta))\, \tfrac{2}{3}\, d\eta$$

$$= \frac{2}{3}\, x(\tfrac{4}{3}t) * h(2t)$$





$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}\, h[n-k]$$

چون x سمپل ها یکی دارد

$\rightarrow = x[0]\, h[n]$ (۱)

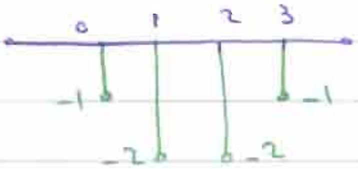
$+$

$x[1]\, h[n-1]$ (۲)

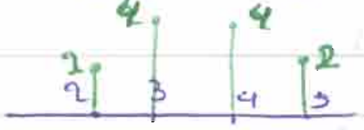
$x[3]\, h[n-3]$ (۳)

(۱) $\longrightarrow$ h[n] خود

(۲) $\rightarrow$

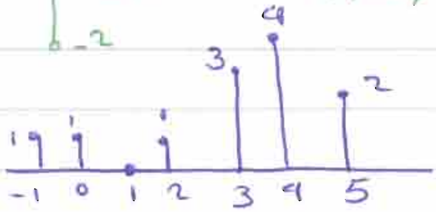


(۳) $\rightarrow$



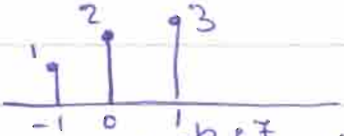
دوبرابر میشود چون $x[3]=2$

$\longrightarrow$ y[n] =

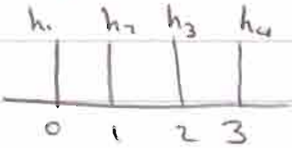


سوال 328 : سراسری 88 :

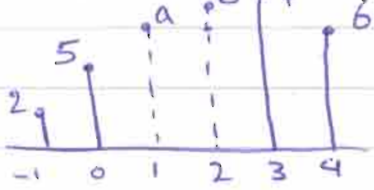
x[n] =



h[n] =



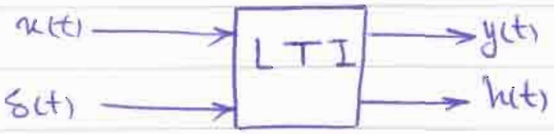
y[n] =



$$y[n] = \sum_{k=\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

BERKEH

2) شناسایی پاسخ ضربه از روی یک نوع ورودی و خروجی :

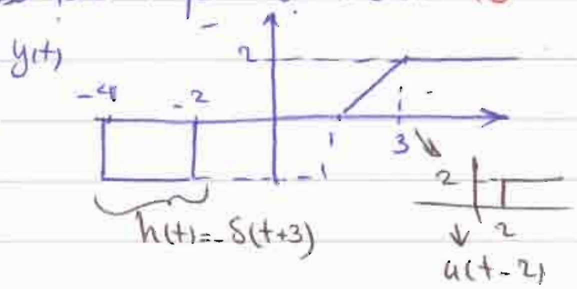


$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \longrightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

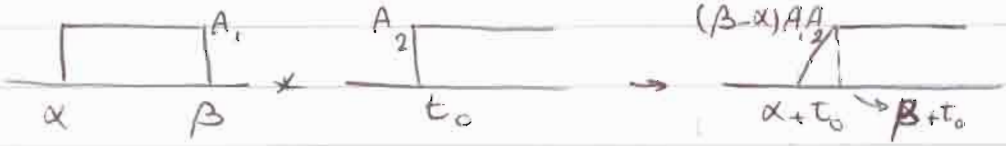
مثال)

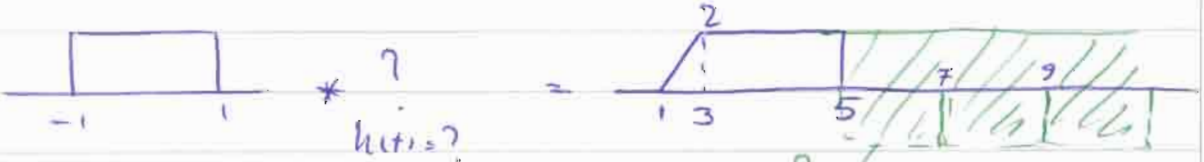
$$H(s) = \frac{Y(s)}{\frac{1}{s+a}} = (s+a)\,Y(s) \longrightarrow h(t) = ? = \mathcal{L}^{-1}\{(s+a)\,Y(s)\}$$

مثال) ورودی و خروجی سیستم LTI به صورت زیر است. پاسخ ضربه آن چیست :



$h(t) = -\delta(t+3) + u(t-2)$





$h(t) = u(t-2) - \delta(t-6) - \delta(t-8) - \delta(t-10) - \dots$ قسمت هاشور خورده باید از هم کم شود.

$$= u(t-2) - \sum_{k=\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau=\int_{\infty}^{\infty} x(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=x(t)*u(t)\rightarrow \mathrm{LTI}\ ✓$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\underset{\rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)}{e^{-2t+2\tau}}\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-2(t-\tau)}\,e(t-\tau)\,d\tau\Rightarrow \mathrm{LTI}\ ✓$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,e^{+t+\tau}\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\underbrace{e^{t+\tau}\,u(t-\tau)}\rightarrow \neq h(t-\tau)\ \times\mathrm{LTI}\ \boxed{\mathrm{LTV}}$$

$$y(t)=\int_{\infty}^{t} x(t)\,e^{-\tau}\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\underbrace{e^{-\tau}\,u(t-\tau)}_{\neq h(t-\tau)}\,d\tau\longrightarrow \boxed{\mathrm{LTV}}\ ✓$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x\left(\frac{\tau}{2}\right)e^{t-\tau}\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{x(\tau)}{\underset{\neq}{x\left(\frac{\tau}{2}\right)}}\,e^{t-\tau}\,u(t-\tau)\,d\tau\rightarrow \mathrm{LTV}$$

$$=x\left(\frac{t}{2}\right)*e^{t}\,u(t)$$

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} x(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=\int_{\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,u(\tau)\,d\tau$$

$$=u(t)\,x(t)*e^{-t}$$

ورودی ضریب متغیر با زمان دارد : LTV

$$y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=\int_{\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,u(2t-\tau)\,d\tau\rightarrow \mathrm{LTV}$$

کانولوشن نوع دوم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau=x(t)*h(t)$$

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\,x(t-\tau)\,d\tau=\int_{\infty}^{\infty} u(\tau)\,e^{-\tau}\,x(t-\tau)\,d\tau=\underbrace{e^{-t}\,u(t)}_{h(t)}*x(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\,x(t-\tau)\,d\tau=\int_{\infty}^{+\infty} e^{-\tau}\,x(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=e^{-t}*\underbrace{x(t)\,u(t)}_{(\mathrm{LTV})}$$

Fx

سؤال 296، آزاد 87: $\overset{\checkmark}{\text{علی}}$ - $\overset{\times}{TI}$ ؟

$$y(t)=\int_{-2t}^{2t} x(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\overbrace{\underset{①\ t<\tau}{u(t-\tau)}\left[\underset{t>-2t②}{u(\tau+2t)}-\underset{t<2t③}{u(\tau-2t)}\right]}^{\neq f(t-\tau)\rightarrow TV}\,d\tau$$

$$①,②,③ \longrightarrow -2t<\tau<t \longrightarrow \begin{cases} y(1)=\int_{-2}^{2} x(\tau)\,u(1-\tau)\,d\tau=\int_{-2}^{1} x(\tau)\,d\tau \\ y(-1)=\int_{2}^{-2} x(\tau)\,u(-1-\tau)\,d\tau=\int_{-2}^{-1} x(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

او اـه به زمان حال و گذشته بستگی دارد پس علی است

سؤال 330، شهریور 88: TI - معکوس پذیر؟

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-\underline{2k}]$$

کانولوشن نوع ۲ است. فقط TV است چون 2k است باید k باشد.

$$y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n=2k \\ 0 & n\neq 2k \end{cases}$$

معکوس پذیر است، $[\uparrow M]$ معکوس پذیر است.

سؤال 366، آزاد 88:

$$\text{sys1}: \ y[n]=\sum_{k=\infty}^{\infty} 2^{-|k|}\,x[n-k] \quad \text{نوع اول}$$

$$\text{sys2}: \ y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\,x[k-n]$$

کدام TI است؟

$$① \rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}\,x[n-k]\,\underline{u[n-k]} \quad \times$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}\,x[k-n]\,u[n-k] \quad \times$$

هیچکدام

سؤال 365، آزاد 88:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(\underline{t+\tau})\,d\tau$$

$\hookrightarrow TV$

TI - پایداری؟

(1)
الف $= x(t-\frac{1}{4}) * \underbrace{\sin t\left[u(-t+\frac{1}{4})-u(-t-\frac{1}{4})\right]}$

$= x(t) * \delta(t-\frac{1}{9})$ //

(1)

$= x(t) * \overset{h(t)}{\sin(t-\frac{1}{4})}\ \overset{u(t)-u(t-1/2)}{\left[u(-t+\frac{1}{2})-u(-t)\right]} \rightarrow$ خطی و TI است

① ← پاسخ صحیح

سراسری ۹۰: سوال 415: معکوس پذیری؟ نوع (۲)

$S_1: y(t) = \int_0^{\infty} e^{-2\tau} x(t-\tau)\, d\tau$

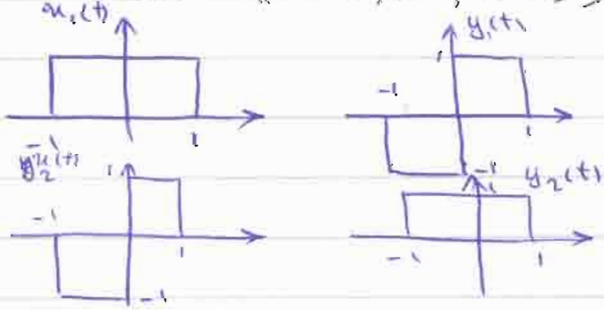
$\rightarrow = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) x(t-\tau)\, d\tau = e^{-2t} u(t) * x(t)$ معکوس پذیر است :

$H(s) = \frac{1}{s+2}$ ، $H_I(s) = s+2$ ، $h_I(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \rightarrow \underline{y(t) = x'(t) + 2x(t)}$

$S_2: y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2|t|} x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\tau|} x(t-\tau) u(t-\tau)\, d\tau$

$= e^{-2t} * x(t) u(t) \xrightarrow{\text{قسمت های منفی حذف می شود پس معکوس ناپذیر}}$

سوال 329: سراسری 88 :

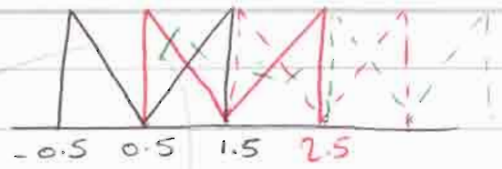


کدام لزوماً صحیح است؟ حافظه ـ TV

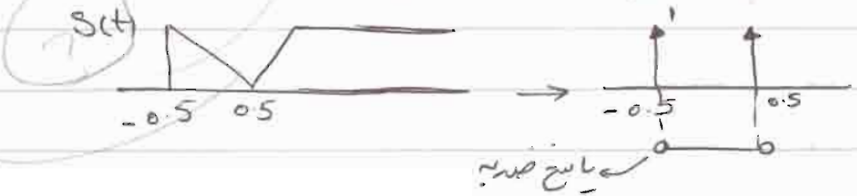
$y(t) = \begin{cases} x(t) & t > 0 \\ -x(t) & t < 0 \end{cases} \longrightarrow$

بی‌حافظه است.

لزوماً TV است



شیب دو خط چون قرینه هم هستند از بین می روند فقط خط راست باقی می ماند قرینه (۳)



۴) در سیستم های LTI خروجی نسبت به ورودی فرکانس جدید ندارد.

$$\cos w_0 t \longrightarrow \boxed{\text{LTI غیر}} \longrightarrow 1+\cos 2w_0 t$$

$y(t)=2x^2(t) \longrightarrow$ TI غیرخطی (NLTI)

$y(t)=2\cos w_0 t \cdot x(t)$ (LTV)

سؤال 286 : سراسری 87 :

$x[n]=\cos\frac{\pi}{10}n$ $\qquad y[n]=1+\cos\frac{\pi n}{5}$

× (۱ بی حافظه ؟

X (۲ غیرخطی ؟

فرکانس جدید داریم سیستم لزوماً غیر LTI است.

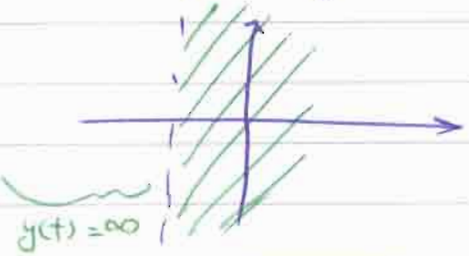
$y[n]=\frac{1+\cos \pi n/5}{\cos n\pi/10}\, x[n] \longrightarrow$ خطی است

نکته (۲):

if $a \notin ROC_H \longrightarrow y(t) \to \infty$

یعنی اگر a در محدوده تعریف شده H(s) نباشد

خروجی به سمت بی‌نهایت می‌رود.



نکته ۳:

$$e^{+t} \longrightarrow \boxed{\frac{s-1}{s+2}} \longrightarrow y_p(t) = 0$$

$$e^{3t} \longrightarrow \boxed{\frac{s-1}{s+2}} \longrightarrow y_p(t) = \frac{2}{5} e^{3t}$$

$$e^{-2t} \longrightarrow \boxed{\frac{s-1}{s+2}} \longrightarrow y_p(t) = t e^{-2t}$$

$$\sin 2t \xrightarrow{s=\pm j2} H(s) = \frac{s^2+4}{(\quad)}$$ برای اینکه پاسخ خصوصی نداشته باشیم

$$e^{-t}\sin 3t \xrightarrow{s=-1\pm j3} H(s) = \frac{s^2+2s+10}{(\quad)}$$

تابع ویژه · مقدار ویژه

$$u[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y[n] = \lambda u[n]$$

$$a^n \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(a)\, a^n$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k]\, h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{n-k} h[k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-k} h[k]$$

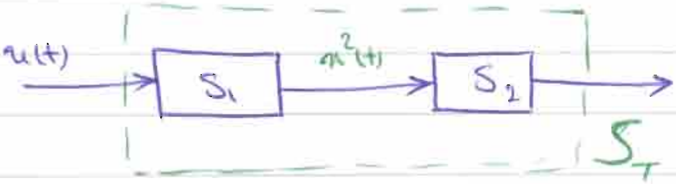
$$H(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} z^{-n} h[n] \qquad = a^n H(z)\Big|_{z=a}$$

↳ z-transform

$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$ همواره درست نیست فقط زمانی که سیگنال علی و پایدار باشد.

یعنی محور jω جزء ROC باشد و قطب‌ها هم سمت چپ قرار گیرد.

اتصال سیستم‌ها:



S_T	S_2	S_1
خطی	خطی	خطی
غیرخطی (*) در بعضی حالات خطی است	غیرخطی	خطی
غیرخطی	خطی	غیرخطی
ممکن است خطی یا غیرخطی شود.	غیرخطی	غیرخطی

(*) این سیستم در حالتی که یکی از سیستم‌های خطی، سیستم خطی با خروجی صفر باشد خطی می‌شود. $\overset{\text{خطی}}{0} = \overset{\text{خطی}}{0} \times$ غیرخطی

سیستم با خروجی DC که مقدار صفر ندارد خطی است.

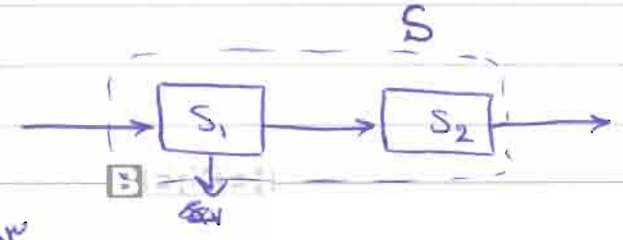
$y(t) = k$

$z(t) = x^2(t)$ $y(t) = z^3(t) = x^6(t)$ ✓ غیرخطی

$z(t) = x^3(t)$ $y(t) = \sqrt[3]{z(t)} = x(t)$ ✓ خطی

S_1 و S_2 ← هردو LTI باشند S_T هم LTI است ولی اگر S_1 و S_2، LTV باشند

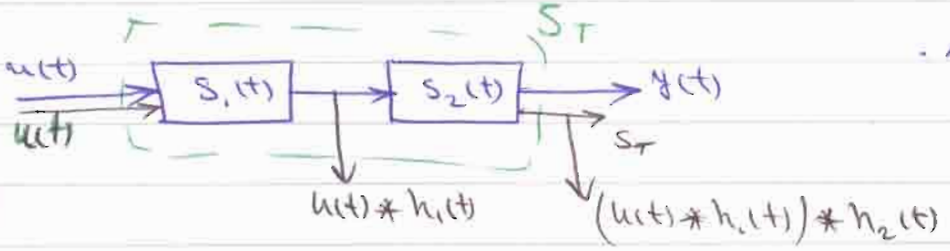
اینجا نظر نمی‌توان داد لزوماً TV نیست.



سراسری ۹۰ـ سؤال 16 الف:

$h_T[n] = h_1[n] * h_2[n]$

S یعنی پاسخ پله.



$S_T(t) = u(t) * h_1(t) * h_2(t) \longrightarrow$ پاسخ ضربه

$$S_T(t) = \frac{d}{dt}\left(S_1(t) * \underbrace{\int h_2(t)}_{S_2(t)}\right)$$

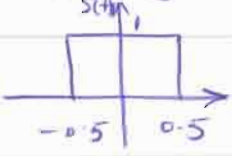
$$S_T(t) = \frac{d}{dt}\left(S_1(t) * S_2(t)\right) \longrightarrow$$ پاسخ کل پله

ورژن گسسته: $S_1[n], S_2[n]$

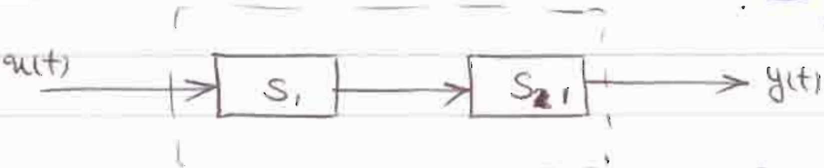
$Z[n] = S_1[n] * S_2[n]$

$S_T[n] = Z[n] - Z[n-1]$

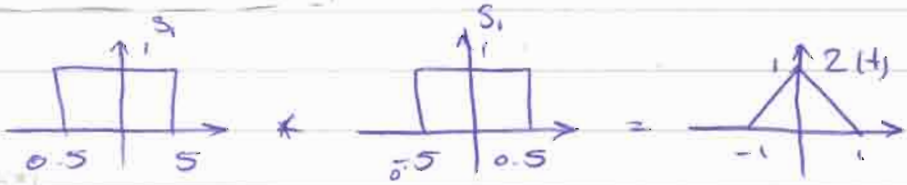
مثال) دو سیستم LTI با پاسخ پله



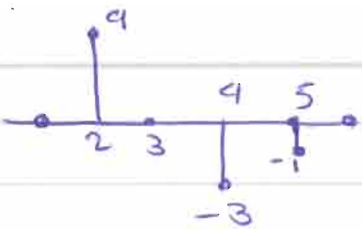
را هم cascode کنیم پاسخ پله سیستم حاصل کدام است؟



پاسخ پله $S_T = ?$



$g_T[n] = Z[n] - Z[n-1]$



بررسی چهار خاصیت یک سیستم‌های LTI از روی h(t):

۱) حافظه ۲) علی ۳) پایداری ۴) معکوس پذیری

۱) حافظه:

$y(t) = k . x(t)$ → خطی، بدون حافظه، TI

هر سیستم LTI که به غیر از صفر جای دیگر مقدار داشته باشد $h(t) = k . \delta(t)$

حافظه‌دار است. پس بی‌حافظه است اگر h(t) فقط شامل ضربه در مبدأ باشد.

تابع تبدیل یک سیستم LTI بدون حافظه یک عدد ثابت است یعنی $H(S) = k$ غیر از

این هر چیزی باشد حافظه‌دار است. یعنی فضای حالت آن: A، B و C

در آن ماتریس صفر است و D=k است.

2) علی:

$$\underset{t<0}{\delta(t)} \longrightarrow \underset{\forall t<0}{h(t) = 0}$$

3) پایداری:

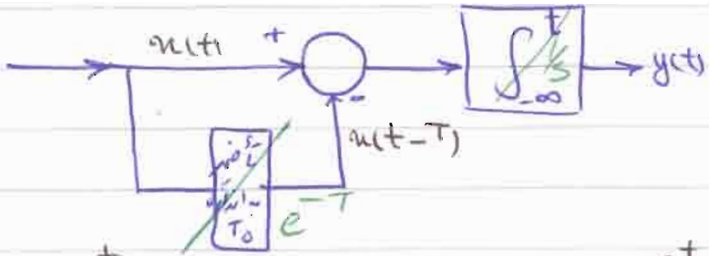
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < M$$

۴) معکوس پذیری:

نکته: * درست است که شکل نزولی است ولی به بینهایت می‌رود. داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$ واگرا ∞ است. پس

این شکل هم ناپایدار است.



مسابقه 89 - سوال 181 :

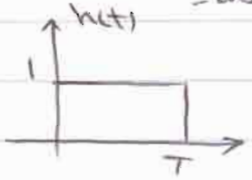
TI و پایداری ؟

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}[x(t)-x(t-T)]dt=\int_{-\infty}^{t}(x(\tau)-x(\tau-T))d\tau$$

خطی و پایدار است ، LTI است

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta(\tau)-\delta(t-T)]dt=u(t)-u(t-T)$$

علی است، حافظه‌دار و پایدار است.



$$H(S)=\frac{1}{S}-\frac{e^{-TS}}{S}=\frac{1-e^{-TS}}{S}\overset{H}{\underset{s\to0}{=}}\frac{Te^{-Ts}}{1}=T$$

صفر محدود ندارد پس معکوس‌پذیر است.

$$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-Ts}$$

مثال: پاسخ ضربه یک سیستم به شکل زیر است.

$$h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$ می‌خواهیم پایداری را بررسی کنیم؟ علی - حافظه‌دار

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\cdots=\frac{1}{1-1/3}}$$

Year Month Date ( )

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k] \longrightarrow$$ پاسخ ضربه شیفت یافته

k مقداری است که ضربه را شیفت داده‌ایم.

$h(t,0)$, $h[n,0]$ $\longrightarrow$ پاسخ ضربه به شیفت آن صورت

$h[n,\tau] \longrightarrow$ پاسخ به $\delta(n-\tau)$

اگر $\frac{n-k}{2}$ بود LTI می‌شد.

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{LTV} \longrightarrow \frac{k}{2}\,\delta[n-k] = h[n,k]$$

ضربه شیفت یافته

$$h(t,\tau) = (t+\tau)^2 \quad TV$$

$$h[n,k] = \frac{n-k}{3} \quad LTI$$

$h(t,\tau) = f(t-\tau)$ همان LTI است.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n,k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\frac{k}{2}\,\delta[n-k] = \boxed{\frac{n}{2}\,x[n]}$$

$$\boxed{y[n] = \frac{n}{2}\,x[n]}$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{LTV} \longrightarrow e^{2(k-n)}\,u[\ ] = h[n,k] \neq f(n-k)$$

$h[n,k]$ تابعی از $n-k$ نیست $(u[n])$ $\neq n-k$

$$y[n] = \sum_{k=\infty}^{+\infty} x[n]h[n,k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,e^{2(k-n]}\,u[k]$$

$$y[n] = e^{-2n}\sum_{k=0}^{\infty} x[k]\,e^{2k}$$

غیرعلی – حافظه دارد – معکوس‌ناپذیر

سؤال 223، سراسری 85: پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی (که می‌تواند خطی نباشد) به صورت زیر است.

②

$$u[n-m] \longrightarrow \boxed{LTV} \longrightarrow (-1)^{\overset{\circ}{nm}} \qquad nm \to TV \qquad m \in \mathbb{Z}$$

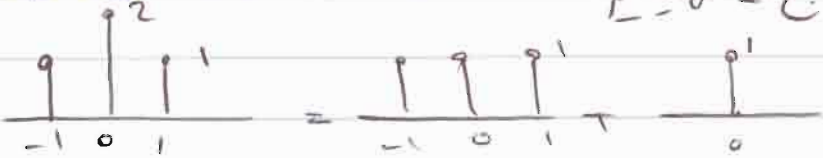
پاسخ به ورودی زیر کدام است؟

①

$$\longrightarrow \boxed{LTV} \longrightarrow ?$$

$\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]=?$

حل: ما ابتدا ① را برحسب جمع ② می‌نویسیم:



$$u[n+1]-u[n-2]+u[n]-u[n-1]$$

$$\longrightarrow = (-1)^n - \cancel{(-1)}^{2n} + \cancel{(-1)}^{0} - (-1)^n = \boxed{0}$$

سؤال 259، سراسری 86:

$$\delta[n]-2\delta[n-1] \longrightarrow \boxed{\text{خطی بدون حافظه}} \longrightarrow 2\delta[n-1]$$

$\rightarrow f(1) = ~~f~~ -1$

$$\delta[n-1]-2\delta[n-2] \longrightarrow \boxed{\text{״}} \longrightarrow \text{کدام نمی‌تواند باشد؟}$$

1) $-\delta[n-1]$ ✓

2) $\delta[n-1]$ X $f(1)=1$

3) $2\delta[n-2]$ X $f(1)=0$

4) $-2\delta[n-2]$ $f(1)=0$ X

$y[n]=f[n]u[n] \longrightarrow$ ضابطه خطی بی‌حافظه

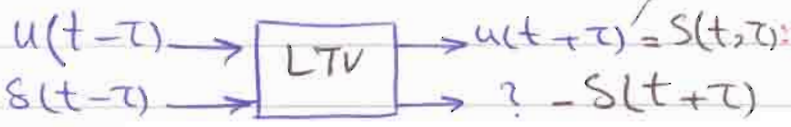
$\longrightarrow f(0)=0$

$f(1)=-1$

در ورودی $\delta[n]$ و $\delta[n-1]$ داریم پس در دو لحظه ٥ و ١ داریم. $\delta[n]$ در خروجی

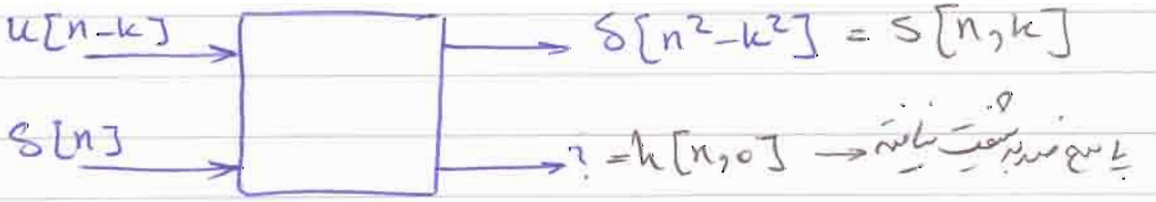
ظاهر نشده پس $f(0)=0$ است. $-2\delta[n-1]$ با ضریب منفی ظاهر شده پس $f(+1)=-1$

سؤال 39 : سراسری ۸۰

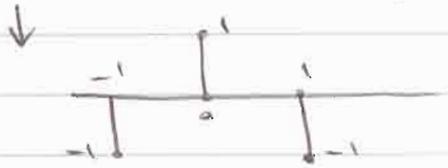


مشتق پله ← ضربه

$$h(t,\tau) = -\frac{ds(t,\tau)}{d\tau} = -\delta(t+\tau)$$



$$h[n,k] = s[n,k] - s[n,k+1]$$
$$= s[n,0] - s[n,1]$$
$$= \delta[n^2] - \delta[n^2-1]$$
$$= \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n+1]$$



نکته :

$h(t,\tau) = k\,\delta(t-\tau)$ → بی‌حافظه

$h(t,\tau) = 0 \quad \forall t<\tau$ → علی

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|\,d\tau =$ عدد ← پایدار

$$\text{①} \text{ و } \text{②} \longrightarrow \boxed{a_k^* = -a_k} \longrightarrow x(t)$$ حقیقی و فرد بود

اگر سیگنال زوج باشد $\longrightarrow$

زوج $\leftarrow$ $\boxed{a_{-k} = a_k}$ ①

حقیقی $\leftarrow$ $a_k^* = a_{-k}$ ②

$$\xrightarrow{(1,2)} \boxed{a_k^* = a_k}$$

زوج و حقیقی بود $x(t)$

پس اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد ضرایب سری فوریه آن نیز زوج و حقیقی است.

و اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد ضرایب سری فوریه آن موهومی خالص و فرد است

محاسبه ضرایب فوریه:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$ (اختلاف حد بالا و پایین انتگرال T است)

$$k=0 \longrightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \rightarrow (\text{average})$$ مقدار متوسط

$$= \frac{\int x}{T} \longrightarrow$$ سطح زیر $x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t}\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t}\right)$$

حقیقی $x(t)$

مثال ۱) $0 \leq k \leq 100$

$$x(t)=\sum_{k=0}^{100}\frac{\sin k\pi/2}{k\pi}e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{\sin k\pi/2}{k\pi}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}a_1=\frac{\sin\pi/2}{\pi}=\frac{1}{\pi}\\ \underset{\text{در بازه نیست} \leftarrow}{a_{-1}}=0\end{array}\right\}a_1=a_{-1}\rightarrow$$ غیرحقیقی

دامنه متقارن نیست ← نه زوج نه فرد

۲)

$$x(t)=\sum_{k=-100}^{100}\underbrace{\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k\pi}}_{a_k}e^{jk\omega_0 t}$$

$a_k=a_{-k}\longrightarrow$ زوج است.

$a_{-k}=a_k=a_k^*\longrightarrow$ حقیقی

} ← سیگنال زوج حقیقی است.

۵)

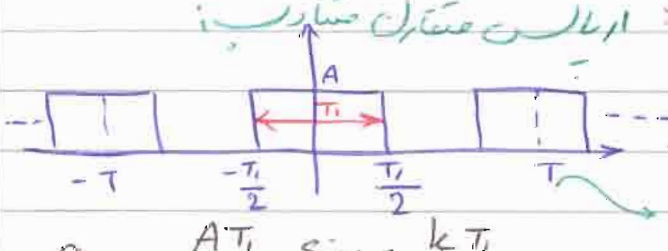
$$x(t)=\sum_{k=-100}^{100}\underbrace{(-1)^k\sin k\pi}_{a_k}e^{jk\omega_0 t}$$

$-a_k=a_{-k}\longrightarrow$ سیگنال فرد است

② $a_k^*=a_k=-a_{-k}\longrightarrow$ غیر حقیقی

} ← سیگنال غیر حقیقی و فرد است

ضرایب سری فوریه در سیگنال حجم: ارسالس متقارن متناوب:



دوره تناوب

T_1 زمان on بودن سیگنال در یک دوره است.

$$a_k=\frac{AT_1}{T}\text{sinc}\frac{kT_1}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}Ax(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{A}{T}\frac{-k}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1/2}^{T_1/2}$$

$$=\frac{A}{Tjk\cancel{\omega_0}\overset{T}{2\pi}}\left(e^{jk\cancel{\omega_0}T_1/\cancel{2}\,\pi/T}-e^{-jk\cancel{\omega_0}T_1/\cancel{2}\,\pi/T}\right)$$

$$\boxed{\omega_0=2\pi/T}$$

ضرایب سری فوریه قطار ضربه: $a_k = \frac{A}{T}$

قطار ضربه تنها سیگنال پیوسته‌ای است که سری فوریه‌ی آن شبیه خودش می‌شود.

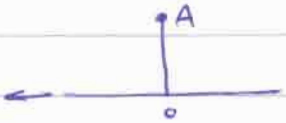
تبدیل فوریه هم برای متناوب داریم هم غیرمتناوب.

اثبات: $\Rightarrow$

$$a_k = \frac{1}{\textcircled{T}} \int_{0-\varepsilon}^{T-\varepsilon} \underset{A\delta(t)}{\underline{x(t)}}\, e^{-jw_0 t}\, dt = \boxed{\frac{A}{T}}$$

حقیقی و زوج است.

۳) اگر $x(t) = A$ (A یک عدد ثابت است):



$$x(t) = A = \cdots + a_{-1} e^{jw_0 t} + a_0 + a_1 e^{jw_0 t} + \cdots$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_0 = A \\ a_k = 0 & \forall k \neq 0 \end{cases}$$

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \;;\; T$$

$$y(t) = x(t) + A = ?$$

$$\xrightarrow{F.S} y(t) \begin{cases} b_k = a_k & \forall k \neq 0 \\ b_0 = a_0 + A \end{cases}$$

مثال)

$$x(t) \longleftrightarrow a_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$

$x(t) = ?$

$$y(t) = \longrightarrow b_k = \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_0} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} = \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{k}{2}$$

$$\frac{AT_1}{8} = \frac{1}{2} \,,\, \frac{k}{2} = \frac{kT_1}{8}$$

$$1 \leftarrow = \frac{AT_1}{8} \overset{\rightarrow 4}{} \sin \frac{kT_1}{8}$$

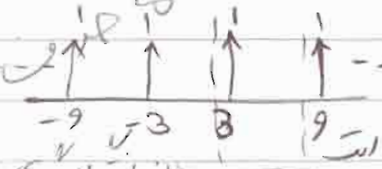
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Year. Month. Date. ( )

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad = f(t-t_0)$$

یا $\delta(t-6)$

ادامه سؤال $\rightarrow$ $\delta(t+6)$ و $\delta(t-6)$ $= \dots + \delta(t+9) + \delta(t+3) + \delta(t-3) + \dots$



در حالت کلی وقتی x(t) یک قطار ضربه با دوره تناوب T

ضرب کنیم دیگر دوره تناوب لزوما T نیست nT است

بازه انتگرال گیری

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{6}\int_{3-\varepsilon}^{9-\varepsilon} \delta(t-3)\, e^{-jk\frac{2\pi}{6}t}\, dt = \frac{1}{6} e^{-jk\pi}$$

$$\boxed{= \frac{1}{6}(-1)^k}$$

$$e^{\pm j\pi} = -1 \,,\quad e^{j\pi/2} = j$$

$$e^{-j\pi/2} = -j$$

$$\begin{cases} a_k = a_{-k} \\ a_k^* = a_k \end{cases}$$

زوج حقیقی است $\leftarrow$ $a_k^* = a_k = a_{-k}$

سؤال 233 _ آزاد 85 : $x(t) = e^{-t} \quad -1 < t < 1 \;;\; T = 2$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t} e^{-jk\pi t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t(1+jk\pi)}\, dt = \frac{-1}{2(1+jk\pi)} e^{-(1+jk\pi)t}\Big|_{-1}^{1}$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{2(kj\pi+1)}\Big[\underset{e^{1}(-1)^k}{e^{1+jk\pi}} - \underset{e^{-1}(-1)^k}{e^{-(1+jk\pi)}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)}\underbrace{(e^{1} - e^{-1})}_{2\sinh(1)} = \frac{(-1)^k}{1+jk\pi}\sinh(1)$$

$$a_{-k} = \frac{(-1)^k}{1-jk\pi}\sinh(1) \qquad a_k = a_k^*$$

حقیقی

نه زوج و نه فرد

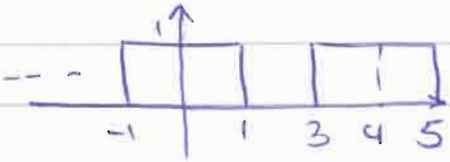
همگرایی سری فوریه :

$$x(t_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t_1} \longrightarrow \text{if } x(t) \text{ countinous at } t=t_1$$

$$\frac{x(t_1^-)+x(t_1^+)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t_1} \longrightarrow \text{if } x(t) \text{ discountion at } t=t_1$$

مثال

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} j^k = ?$$



با توجه به ضرایب سری فوریه سیگنال x(t) حاصل سری زیر را بیابید؟

$A=1$

$T_1=2$

$T=4$

$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$a_k = \frac{1\times 2}{4} \operatorname{sinc} \frac{k(2)}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi k/2}{\pi k/2} = \boxed{\frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}}$$

یادآوری :

$$(-1)^k = e^{jk\pi}$$

$$(j)^k = e^{j\pi/2 k}$$

$$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} j^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} e^{jk\pi/2 t} \quad ①$$

یعنی در t=1 را می‌خواهد

به جای j^k از فرمول بالا

t ندارد یعنی t=1

$$\boxed{\text{if } t=0 \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} \Rightarrow x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k}$$

$$① \longrightarrow x(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} e^{jk\pi/2}$$

$$x(1) = \frac{x(1^-)+x(1^+)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} (-1)^k = x(2) = 0$$

4K

$$C_k = \left(a_k \longrightarrow \boxed{\uparrow 4} \longrightarrow \right) + \left(b_k \longrightarrow \boxed{\uparrow 3} \longrightarrow \right)$$

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k}{4} & k : \text{مضرب } 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} + \begin{cases} \frac{b_k}{3} & k : \text{مضرب } 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_3 = b_1 \\ C_8 = a_2 \\ C_{12} = a_3 + b_4 \end{cases}$$

سؤال 11، سراسری 85 :

$$y(t) = \overset{T_0}{x(t)} + \overset{\frac{2}{3}T_0}{x\left(\tfrac{3}{2}t\right)}$$

$2T_0 \uparrow$

$2T_0 = [1, \frac{2}{3}]$ ک.م.م

$$x(t) \longleftrightarrow a_k \;;\; T_0$$

$$y(t) \longleftrightarrow b_k \qquad b_2 = ?$$

$\hookrightarrow T = 2T_0$

$$a_1 = b_3 = b_2$$

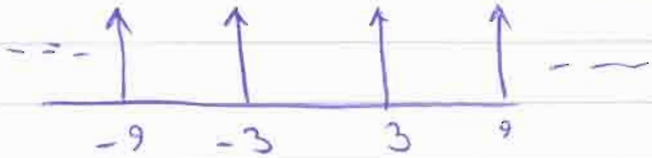
$$b_k = a_k \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} + a_k \longrightarrow \boxed{\uparrow 3} \longrightarrow$$

$$b_k = \begin{cases} a_k/2 & k : \text{even} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} + \begin{cases} a_k/3 & k : \text{مضرب } 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

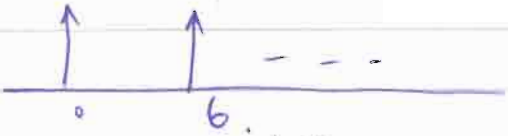
$$\boxed{b_k = a_k + a_k \longrightarrow \boxed{\uparrow 2} \longrightarrow}$$

$$b_2 = a_2 + a_1$$

$x(t) \longleftrightarrow a_k$



$$\overset{b_k}{y(t)} = \overset{a_k}{x}(t - \textcircled{3})$$



$$\Rightarrow b_k = \frac{A}{T} \downarrow$$

$$b_k = e^{-jk\frac{\pi}{3}(t_0=3)} = a_k \Rightarrow \frac{1}{6} = e^{-jk\pi} a_k$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{6} e^{jk\pi}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{6}(-1)^k}$$

(مهم) :

$x(t) \longleftrightarrow a_k \; ; T$

$x(t - \frac{T}{2}) \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0(T/2)} a_k \; ; T = (-1)^k a_k \; ; T$

$x(t + \frac{T}{4}) \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0(-T/4)} a_k \; ; T = j^k a_k \; ; T$

مثال :

$x(t) \longleftrightarrow a_k = (-1)^k \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} \; ; T = 8$

$y(t) \longleftrightarrow b_k = j^k \frac{\sin k\pi/2}{k\pi} \; ; T = 8$

مطلوبست $x(t)$, $y(t)$ ؟

$$\xrightarrow{FS} \frac{a_k+a_{-k}}{2} \underset{\uparrow}{=} \frac{a_k+a_k^*}{2} = Re\{a_k\}$$

x(t) حقیقی

نتیجه:

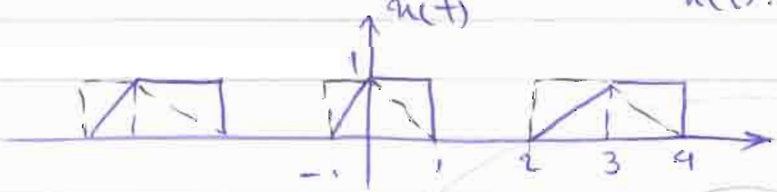
اگر x(t) حقیقی باشد: ضرایب سری فوریه قسمت زوج سیگنال برابر است با قسمت زوج ضرایب سری فوریه آن سیگنال و ضرایب سری فوریه قسمت زوج سیگنال حقیقی برابر است با قسمت حقیقی ضرایب سری فوریه آن سیگنال

همین داستان برای قسمت فرد:

$$x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \xrightarrow{FS} \frac{a_k-a_{-k}}{2} \underset{\uparrow}{=} \frac{a_k-a_k^*}{2} = j\,Im\{a_k\}$$

x(t): Real

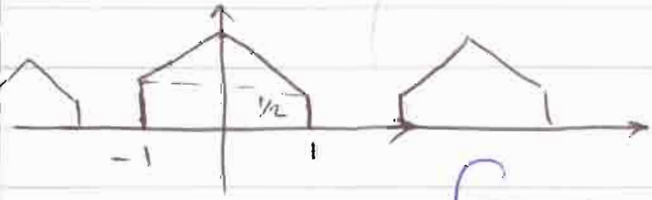
مثال)



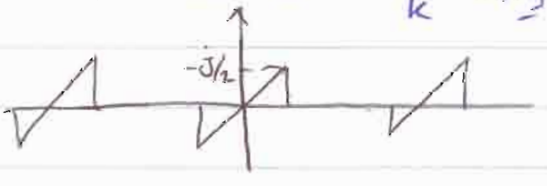
$x(t) \longleftrightarrow a_k \quad ; T=3$

$y(t) \longleftrightarrow b_k = Re\{a_k\}$

$y(t) = ? = x_e(t)$



به عنوان تمرین $z(t) \longleftrightarrow C_k = I_m\{a_k\}$ را بدست آورید.



$$x(t) \longleftrightarrow a_k \; ; \; T$$

$$Re\{x(t)\} \longleftrightarrow b_k = ?$$

$$Real\{x(t)\} = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \xrightarrow{Fs} \frac{1}{2}(a_k + a^*_{-k})$$

↪ if $x(t)$: حقیقی

۱۲) مشتق‌گیری در حوزه زمان:

$$x(t) \longleftrightarrow a_k \; ; \; T$$

فرض بر این است که پریودیک است.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow (jk\omega_0)\, a_k \; ; \; T$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \underbrace{jk\omega_0}_{\text{اضافه}} \underbrace{\sum_{k=\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}_{\text{تعریف سری}}$$

اندازه تغییر می‌کند و فاز آن به خاطر j به اندازه $\frac{\pi}{2}$ اضافه می‌شود.

$$\frac{d^2x(t)}{dt} \longleftrightarrow (jk\omega_0)^2 a_k = -k^2\omega_0^2 a_k$$

۱۳) انتگرال‌گیری در حوزه زمان:

$$x(t) \longleftrightarrow a_k \; ; \; T$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t) \longleftrightarrow \frac{a_k}{jk\omega_0} \qquad k \neq 0$$

اگر $k = 0$ شد باید $a_0 = 0$ باشد زیرا اگر سیگنال مقدار dc داشته باشد در انتگرال آن متناوب نمی‌شود. شرط آنکه بتوان از یک سیگنال انتگرال گرفت و انتگرال آن

$$Fs\{w(t+3/2)\} = \frac{(-1)(1)}{6}\ \mathrm{sinc}\frac{k(1)}{6}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$e^{-jk\pi/3(-3/2)} \qquad d_k = \frac{-1}{6}\ \mathrm{sinc}\frac{k}{6}$$

$$\longrightarrow d_k = e^{-jk\pi/2}\left(\frac{-1}{6}\ \mathrm{sinc}\frac{k}{6}\right) = \frac{-1}{6}(-j)^k\ \mathrm{sinc}\frac{k}{6}$$

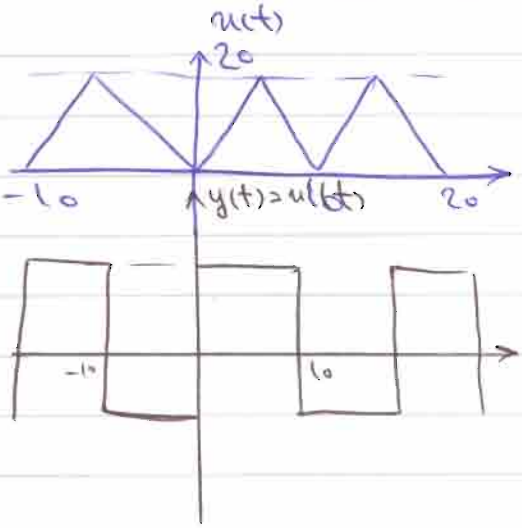
$$\longrightarrow y(t) = z(t) + w(t)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

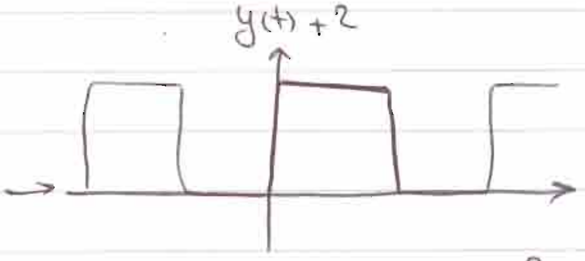
$$b_k = c_k + d_k \quad , \ b_0 = 0 \longrightarrow$$ چون dc ندارد

$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{jk\omega_0} b_k \quad , \ a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt =$$ مساحت ذوزنقه

$$\boxed{= \frac{1}{6} \times 3}$$



سؤال امتحانی:



(حل شود)

9) ضرب در حوزه زمان:

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$y(t) \longleftrightarrow b_k$$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

$$\downarrow$$

$$c_k = a_k * b_k$$

$$\longrightarrow c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, b_{k-l}$$

Year ۹۰ Month ۷ Date ۱۸

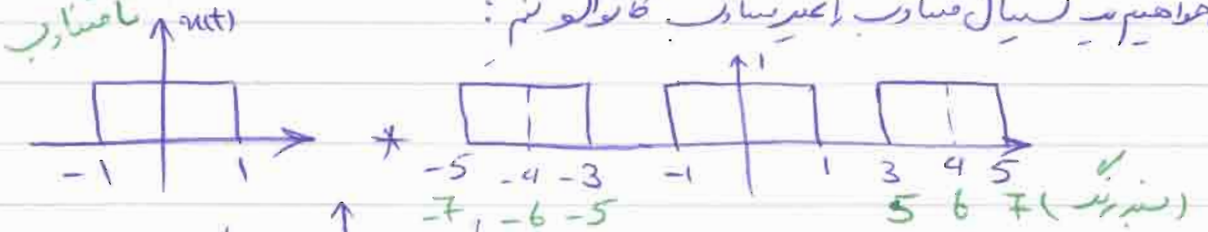
جلسه دهم

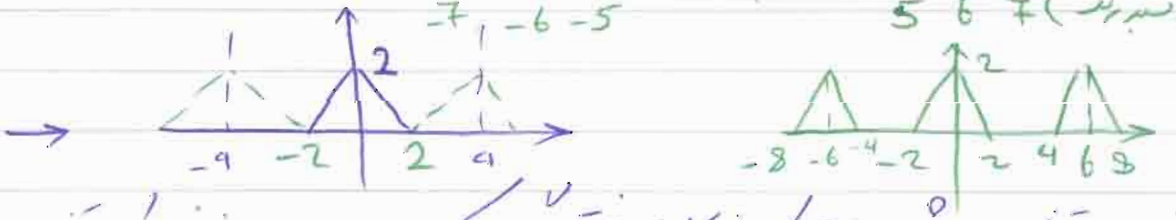
۱۰) خاصیت کانولوشن در حوزه زمان:

C.T.F.S
$$\begin{cases} x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x(t) \longleftrightarrow a_k \; ; \; T \\ y(t) \longleftrightarrow b_k \; ; \; T \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow z(t) = x(t) * y(t) \longleftrightarrow c$$

می‌خواهیم یک سیگنال متناوب را با غیر متناوب کانوالو کنیم:





اگر خروجی متناوب باشد در حالت کلی نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که ورودی یا پاسخ ضربه یک متناوب بوده است.

نکته: x(t) متناوب است و y(t) هم متناوب است. پس کانولوشن تعریف شده کانولوشن حلقوی، دایره‌ای یا circular است. یعنی

$x(t) \longleftrightarrow a_k \; ; \; T$

$y(t) \longleftrightarrow b_k \; ; \; T$

$z(t) = x(t) * y(t) \longleftrightarrow c_k \; ; \; T \quad , \quad \boxed{c_k = T.\, a_k .\, b_k}$

if $y(t)=x(t) \rightsquigarrow \underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{P_x \text{ (توان سیگنال متناوب)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

یعنی اگر از ما توان سیگنال متناوب را بخواهند می‌توان از پارسوال استفاده کرد.

$x(t)\, x^*(t) = |x(t)|^2$, $a_k a_k^* = |a_k|^2$

مثال: $x(t) = 1 + \cos(2t - \frac{\pi}{4})$, $P_x = ?$

سیگنال متناوب است. $\omega_0 = 2 \rightsquigarrow \boxed{T=\pi}$

$$x(t) = \underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{\frac{1}{2}} e^{j2t} \cdot e^{-j\pi/4} + \underset{a_{-1}}{\frac{1}{2}} e^{-2jt} \cdot e^{j\pi/4}$$

$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$, $a_{-1} = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$

$$P_x = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

مثال: $x(t) \longleftrightarrow a_k$; $T=6$, ۱) $x(t) = -x(t-③)$ $\rightarrow T/2$

۲) $a_k = 0 \quad \forall |k|>3$, ۳) $a_3 = 5$, ۴) $\frac{1}{6}\int_T |x(t)|^2 dt = 50$

مطلوب است $x(t)$:

بقیه a_k صفراند: $a_{-3}, \overset{0}{\cancel{a_{-2}}}, a_{-1}, \overset{0}{\cancel{a_0}}, a_1, \overset{0}{\cancel{a_2}}, a_3 \rightarrow \boxed{a_3=5}$ $\rightsquigarrow$ از خاصیت دوم

$x(t) = -x(t - \frac{T}{2}) \rightsquigarrow a_k = -(-1)^k a_k$

یعنی $a_{(\text{زوج})}$ ها صفراست.

$a_{k+lN} = a_k$ (تکرار می‌شود) اگر k را با N جمع ببندیم سری فوریه اضافه نمی‌شود.

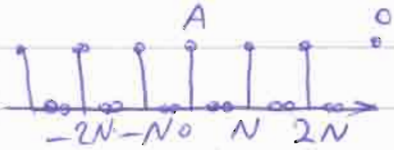
$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\omega_0 n} \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \end{cases}$$

(چون این سیگنال گسسته است و تناوب دارد. $\leftarrow$ $jk\omega_0 n$

مانند این یکی از ∞- تا ∞ نمی‌رود.)

سری فوریه دو سیگنال مهم:

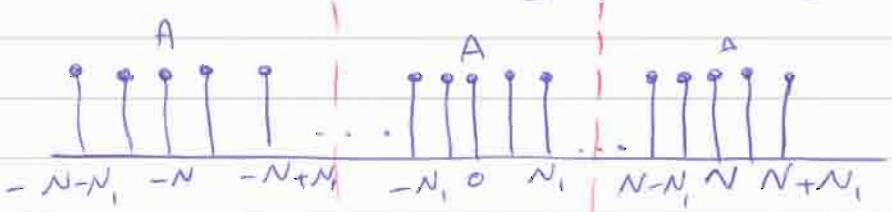
قطار ضربه D.T.:



$a_k = \frac{A}{N}$ $\quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] = \dots + \delta[n+N] + \delta[N]$

$+ \delta[n-N] + \delta[n-2N] + \dots$

پالس مستطیل گسسته:



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} A e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{A}{N} \frac{\sin \frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin \frac{k\pi}{N}}$$

یادآوری: $a_k = \frac{AT_1}{T_1} \operatorname{Sinc} k\frac{T_1}{T} = \frac{A\cancel{T_1}}{T} \frac{\sin k\frac{\pi}{T}T_1}{\frac{k\pi}{T}\cancel{T_1}} \nearrow$

$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \longleftarrow$ سری هندسی

$(-1)^k = \cos k\pi = e^{-jk\pi}$

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k}{4} & k: \text{مضرب } 4 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} + \begin{cases} \frac{b_k}{3} & k: \text{مضرب } 3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$C_1 = 0$ $\quad C_8 = a_2$

$C_2 = 0$

$C_3 = b_1$ $\quad C_{12} = a_3 + b_4$

۲) شیفت در حوزه زمان:

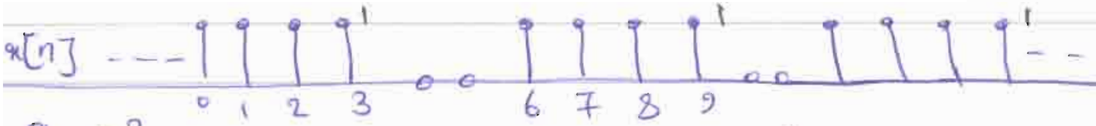
$x[n] \longleftrightarrow a_k ; N$

$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0(n_0)} a_k ; N$

$x[n-\frac{N}{2}] \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0(N/2)} a_k = (-1)^k a_k$ (سراسری 84)

یادآوری: $\omega_0 N = 2\pi \rightarrow e^{-jk\frac{2\pi}{2}} = e^{-jk\pi} = (-1)^k = \cos k\pi$

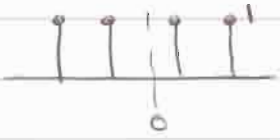
سراسری 84:



$a_k = ?$

برای اینکه متقارن شود 1.5 تا به چپ شیفت می دهم.

$x[n+\frac{3}{2}] = y[n]$



$$= \frac{1}{6} \frac{\sin \frac{k\pi}{6}(4)}{\sin \frac{k\pi}{6}} = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{6})(-\frac{3}{2})}$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{6} \frac{\sin \frac{2k\pi}{3}}{\sin \frac{k\pi}{6}} e^{-jk\pi/2}$$

سوال 76 - سراسری 81:

$x[n] = \sin(\frac{2\pi}{3} n) \cos(\frac{\pi n}{2})$

$\frac{2\pi}{\pi/2} = 4 = N$

$N = 12$ $\quad N = 3$ $\quad N = 4$

$\omega_0 = \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{N}$

ضرایب سری فوریه کدام است؟

3) وارون زمانی:

$x[n] \longleftrightarrow a_k ; N$

$x[-n] \longleftrightarrow a_{-k} ; N$

$x[n+3] \longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
x[n] \arrow[r, "n_0=-3"] \arrow[d] & x[n+3] \arrow[r, "x-1"] \arrow[d] & x[-n+3] \arrow[d] \\
a_k^{k} & e^{-jk\omega_0(-3)} a_k & e^{-3jk\omega_0} a_{-k}
\end{tikzcd}$$

4) شیفت در فرکانس:

$x[n] \longleftrightarrow a_k ; N$

$e^{jM\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow a_{k-M}$

$= y[n]$

$\hookrightarrow b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{jM\omega_0 n} e^{-jk\omega_0 n}$

$x[n] \longleftrightarrow a_k ; N : \text{even}$ (حالت خاص): سراسری 84 _ سؤال 179 :

N زوج است.

$x[n-\frac{N}{2}] \longleftrightarrow (-1)^k a_k$

$(-1)^N x[n] \longleftrightarrow$

$\downarrow$

$e^{j\pi n} x[n] = e^{j \overset{M}{\boxed{\frac{N}{2}}} \overset{\omega_0}{\boxed{\frac{2\pi}{N}}} n} \quad x[n] \longleftrightarrow a_{k-\frac{N}{2}}$

N فرد باشد:

$x[n] \longleftrightarrow a_k ; N : \text{odd}$

$y[n] \longleftrightarrow b_k$

$x[n] \longleftrightarrow a_k \,;N$

$\frac{1}{N}\, x[n] * x[N] \longleftrightarrow a_k^2$

سؤال ۱۴۱ - سراسری 83 :

$x[n] \longleftrightarrow c_k \,; N=4$

$y[n] \longleftrightarrow d_k \,;N$

$$\begin{cases} c_0=-1 \\ c_1=-j=c_{-3} \\ c_2=1=c_{-2} \\ c_3=j \end{cases}$$

$c_{-2}=c_{-2+4}=c_2$

$\omega_0=\frac{\pi}{2}$

سیگنال حقیقی است

$y[n] = x[-n+1]$

$d_2=?$

"سیگنال حقیقی"

$$x[n]=\sum_{k=0}^{3} a_k e^{jk\omega_0 n} = \underbrace{(-1)+(-j)e^{j\frac{\pi}{2}n}+(1)e^{j\frac{\pi}{2}\times 2n}+(j)\,e^{j\frac{3\pi}{2}n}}$$

$c^*_2 = c_{-2} = 1$

$$(1)e^{-j2\frac{\pi}{2}n}+(j)e^{-j\frac{\pi}{2}n}+(-1)+(-j)e^{j\frac{\pi}{2}n} = -1+(-j)e^{j\pi/2n}+(1)e^{j\frac{\pi}{2}\times 2n}+(j)e^{j\frac{3\pi}{2}\times n}$$

$=x[n]$

$j\left(e^{-j\pi/2n}-e^{j\pi/2n}\right)$

$= 2\sin\frac{\pi}{2}n$

$\rightsquigarrow x[n]=(-1)^n+(-1)+2\sin\frac{n\pi}{2}$

$$\begin{tikzcd} x[n] \arrow[r] \arrow[d] & x[n+1] \arrow[r] \arrow[d] & x[-n+1] \\ a_k & e^{-jk\omega_0(-1)}\,c_k & e^{-j(-k)\omega_0(-1)}\,c_{-k} \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow d_k = c_{-k}\,e^{-jk\omega_0} = c_{-k}\,e^{-jk\frac{\pi}{2}}$

$\rightsquigarrow d_2 = c_{-2}\,e^{-j2\frac{\pi}{2}} = (1)(-1) = \boxed{-1}$

$d_3 = c_{-3}\,e^{-j3\frac{\pi}{2}} = (-j)(j) = \boxed{1}$

$$\rightarrow = \sum_{l=0}^{N-1} a_l\, a^*_{l-k} = \sum_{l=0}^{N-1} a^*_{-l}\, a_{k-l}$$

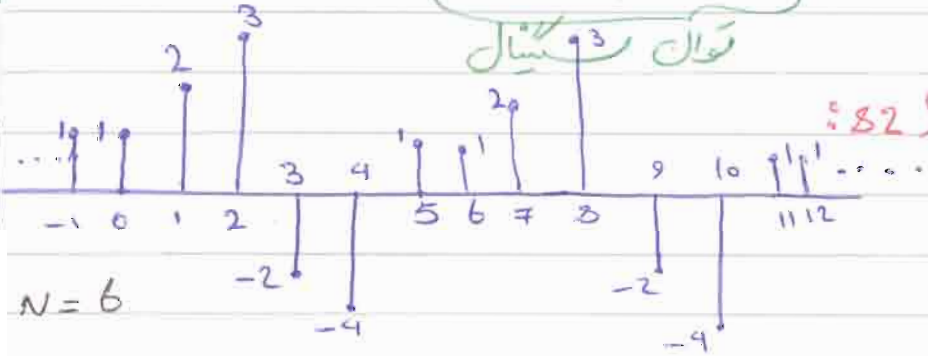
7) خاصیت پارسوال:

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)\, y^*(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, a^*_k \quad (C.T.)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, y^*[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, a^*_k$$

$$x[n] = y[n] \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2}_{\text{توان سیگنال}} = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

سؤال ۱۵۹، سراسری 82:



$N = 6$

$$\sum_{k=-3}^{3} a_k = ?$$

$$\sum_{k=-3}^{3} (-1)^k a_k = ?$$

$$\sum_{k=\langle n\rangle} a_k = x[0]$$

$$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 n} = x[n] \xrightarrow{n=0} = x[0]$$

$$\sum_{k=-3}^{3} a_k = \sum_{k=-3}^{2} a_k + a_3 = x[0] + a_3 = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-jk\underset{\frac{2\pi}{N}}{\omega_0} n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-j3\frac{\pi}{3}n} \quad \boxed{= a_3 = \frac{-1}{6}}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n](-1)^n = \frac{1}{6}\left(1 - 2 + 3 + 2 \underset{+(-4)}{-4} - 1\right) = \boxed{\frac{-1}{6}}$$

$x[n] \longleftrightarrow a_k$; N یک سیگنال متناوب است پس خودش ضرایب فوریه دارد

$a_{k+N} = a_k$

$a_n \longrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$

اثبات ⇝ $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\omega_0 n}$ ⇝ $x[n] \longleftrightarrow a_k$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$k \leftrightarrow n$

$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[+k] e^{-jk\omega_0 N}$$

$k \to -k$

$$a_n = \sum_{k=0}^{N-1} \boxed{\frac{1}{N} x[-k]} e^{jk\omega_0 N}$$

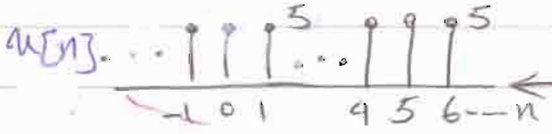
$$a_n \longrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$$

مثال)

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{5}n}{\sin\frac{\pi}{5}n} \longrightarrow$$

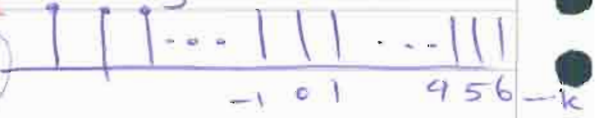
یعنی می‌توان فهمید اگر سوال است ضریب سری فوریه سیگنالی بخواهد خودش ضریب سری فوریه است.

یعنی:



$\longleftrightarrow a_k = \frac{A}{N} \frac{\sin\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{k\pi}{N}}$

$$a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{5}(3)}{\sin n\frac{\pi}{5}} \longrightarrow \frac{1}{5}$$



$\frac{1}{N} x[-k]$

چون $x[k]$ زوج است $x[k]=x[-k]$

تبدیل ← $\boxed{\omega = 2\pi f}$

سری ← $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{N}}$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} x(w)e^{jwt}\,dw$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow dw = 2\pi df \quad \rightsquigarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

بیشتر از فرمول ها با f راحت است یکی از اینها - هر دو را باید بلد باشیم.

$$\begin{cases} X_{\omega}(\omega) = x_f(2\pi f) \\ x_{\omega}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = x_f(f) \end{cases}$$

نکته:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{+\infty} x(w)e^{jwt}\,dw$$

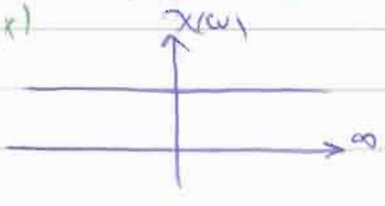
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{+\infty} x(w)\,dw \quad \text{و} \quad x(0) = \int_{\infty}^{+\infty} x(f)\,df$$

تبدیل فوریه چند سیگنال مهم:

$$1)\ x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\text{م}} \delta'(t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} (jw)^1 \times 1$$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-jwt}\,dt = \textcircled{1}$$



یعنی وقتی به سیستم ضربه بزنی همه فرکانس ها با یک ضریب تحریک می شوند

$$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \delta''(t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} (jw)^2 \times 1$$

$$x(t) \longrightarrow x(w)$$
$$x^{n}(t) \longrightarrow (jw)^n x(w)$$

BERKEH

جلسه یازدهم

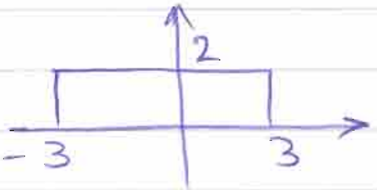
Year: ۹۵ Month: ۴ Date: ۲۵

$\underline{\omega = 2\pi f}$ $\quad TA \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = \boxed{AT \operatorname{sinc} fT}$

پس یک برحسب f راحت‌تر است.

$.if \begin{cases} A=1 \\ \frac{T}{2} = 1/2 \end{cases}$ $\quad x(t)=\Pi(t)$ $\quad \Pi(t) \longleftrightarrow \operatorname{sinc} f$

مثال)



$x(f) = 2(6) \operatorname{sinc} f(6)$

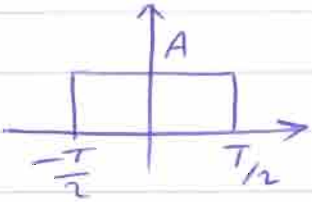
$= 12 \frac{\operatorname{sinc} 6\pi f}{6\pi f} \xrightarrow{f=\frac{\omega}{2\pi}} 12 \frac{\sin \frac{\omega}{\cancel{2}} 6}{\frac{\omega}{\cancel{2}} (6)}$

$= 12 \frac{\sin 3\omega}{3\omega}$

جلسه یازدهم

تبدیل فوریه زمان پیوسته:

$x(t) = A\,\Pi(\frac{t}{T})$



Year Month Date ( )

نکته:

$$\text{if } x(t): \text{Real} \Rightarrow x(\omega) = x^*(-\omega)$$

روابط کلی

$$\begin{cases} x(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \\ X^*(-\omega) = A(-\omega) - jB(-\omega) \end{cases}$$

$$\text{if } x(t): \text{Real} \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) = A(-\omega) \rightsquigarrow \text{زوج از } \omega \\ B(-\omega) = -B(\omega) \rightsquigarrow \text{فرد از } \omega \end{cases}$$

$$\underbrace{|x(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}}_{\text{زوج از } \omega} \qquad \underbrace{\measuredangle x(\omega) = tg^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}}_{\text{فرد از } \omega}$$

۲) خاصیت وارون زمانی:

$$x(t) \longleftrightarrow x(\omega)$$

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$$

x(t) زوج باشد ← x(ω) زوج است.

" فرد " ← " فرد " .

نکته: دوگان این نکته هم مهم است.

x(t) حقیقی باشد ← x(ω) = زوج از ω + j فرد از ω

x(t) زوج ← X(ω) زوج

x(t) فرد ← x(ω) فرد

$$\text{حقیقی و زوج } X(\omega) \leftarrow X(\omega) = \overbrace{A(\omega)}^{\text{زوج از } \omega} + j\,0$$
← x(t) زوج و حقیقی

$$x(\omega) = 0 + j\underbrace{B(\omega)}_{\text{فرد}}$$
← x(t) فرد و حقیقی

X(ω) فرد و موهومی خالص

۸۰

۳) شیفت در حوزه زمان: (این خاصیت بسیار مهم است)

$$x(t) \longrightarrow \left.\begin{matrix} x(\omega) \\ x(j\omega) \end{matrix}\right\} \text{countinus}$$

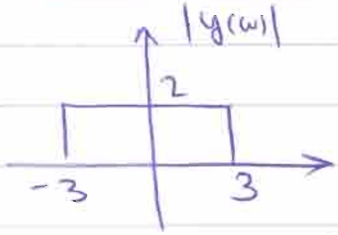
$$\left.\begin{matrix} x(e^{j\omega}) \\ x(\Omega) \\ x(e^{j\Omega}) \end{matrix}\right\} \text{d.c}$$

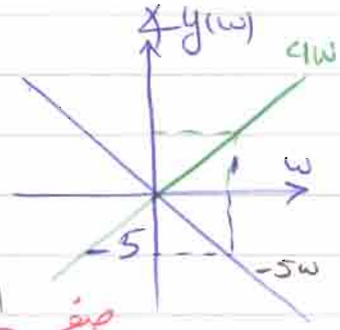
x(ω) در مرکز ω=0 یعنی سطح زیر منحنی

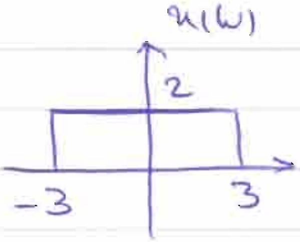
$$\underset{y(t)}{=} x(t-t_0) \longrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega) = y(\omega)$$

$$|y(\omega)| = |x(\omega)| \qquad \measuredangle y(\omega) = \underbrace{-\omega t_0}_{\text{فاز خطی}} + \measuredangle x(\omega)$$

$$\boxed{|e^{j\theta}| = 1 \ , \ \measuredangle e^{j\theta} = \theta}$$







$$|y(\omega)| = |x(\omega)| \qquad x(t) = 2\frac{\sin 3t}{\pi t}$$

$$\measuredangle y(\omega) = \underline{-5\omega} + \overbrace{\measuredangle x(\omega)}^{\text{صفر}}$$

$$y(t) = x(t-5) = 2\frac{\sin 3(t-5)}{\pi(t-5)}$$

$$y(t) = x(t+4)$$

$$y(\omega) = +4\omega + 0$$

$$y(t) = \frac{2\sin 3(t+4)}{\pi(t+4)}$$

نکته:

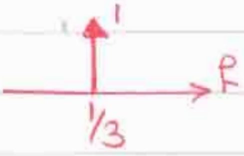
شیفت معادل است یک فاز خطی در فرکانس می دهد

فاز مثبت یعنی شیفت به چپ.

$x(t) \longrightarrow X(\omega)$

$e^{j\omega t}\, x(t) \longrightarrow X(\omega-\omega_0)$

$1 \longrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$



$e^{j\frac{2\pi}{3}t} \times 1 \longrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - \frac{2\pi}{3})$

$\delta(f-\frac{1}{3})$

به طور کلی :

$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow 2\pi\ \delta(\omega-\omega_0)$

مدولاسیون :

ضرب cos در تابع

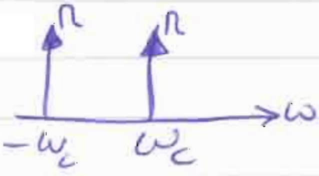
$x(t)\cos\omega_c t = x(t)\left[\frac{1}{2}e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_c t}\right]$

M

$\xrightarrow{\text{ضرایبه بلدیم}} \frac{1}{2}X(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_c)$ ①

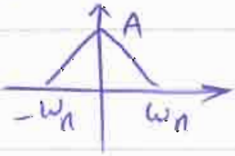
$\text{if } x(t)=1 \longrightarrow X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$ ②

$\xrightarrow[x(t)=1]{①,②} \pi\,\delta(\omega-\omega_c) + \pi\,\delta(\omega+\omega_c)$

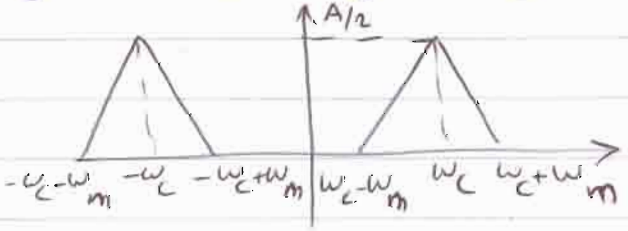


مثال

$x(t) \longrightarrow X(\omega)$



$y(t) = x(t)\cos\omega_c t \qquad Y(\omega) = ?$



شرط این که دو شکل موج با هم برخورد نکنند :

$\omega_c - \omega_m > -\omega_c + \omega_m$

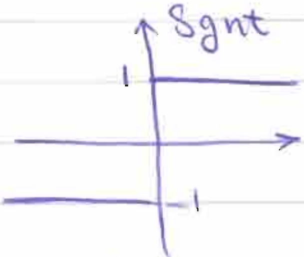
$\omega_c > \omega_m$

۵) خاصیت انتگرال گیری در حوزه زمان:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi\,\delta(\omega)\,x(0) \quad ①$$

صورت اثبات رابطه بالا:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$



این تابع sgn است که می توان از روی پله آن را ساخت:

$$\mathrm{Sgn}\,t = 2u(t) - 1$$

از طرفین فوریه می گیریم

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sgnt}\} = 2\,\mathcal{F}\{u(t)\} - \mathcal{F}\{1\}$$

$$(\mathrm{Sgnt})' = 2\,\delta(t)$$

فوریه

$$j\omega\,\mathcal{F}\{\mathrm{sgnt}\} = 2 \rightarrow \boxed{\mathcal{F}\{\mathrm{sgnt}\} = \frac{2}{j\omega}}$$

نکته

$$\frac{1}{t} \xleftrightarrow{\text{Dual}} \frac{2}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{j\omega} = 2\,\mathcal{F}\{u(t)\} - \mathcal{F}\{1\}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}}{j\omega} = \cancel{2}\,\mathcal{F}\{u(t)\} - \cancel{2}\pi\,\delta(t)$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(t)$$

سطح زیر منحنی نامحدود است در فوریه خود ضربه دارد.

$$\longrightarrow \mathcal{F}\{\mathrm{sgnt}\} = \frac{2}{j\omega} \qquad \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(t)$$

۸۹

(۴)

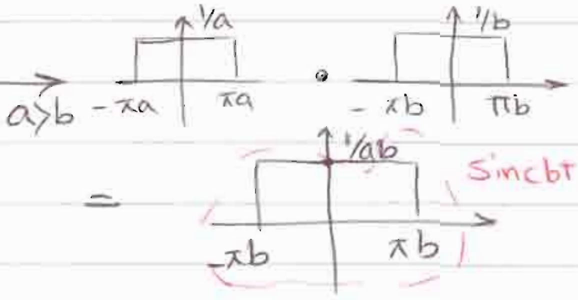
۴, کانولوشن و ضرب در حوزه زمان ؟

$x_1(t) * x_2(t) \longrightarrow x_1(\omega) \cdot x_2(\omega)$

مثال)

$\text{Sinc}\,at * \text{Sinc}\,bt \longrightarrow$

$\downarrow \frac{\sin \pi at}{\pi at}$ $\qquad \downarrow \frac{\sin b\pi t}{\boxed{b}\pi t}$



تبدیل فوریه $\frac{\sin b\pi t}{\pi t}$ را می‌دانیم در $\frac{1}{b}$ ضرب کنیم بدست می‌آید. پس شکل فوق تشکیل می‌شود.

حالا برای اینکه بدانیم $\text{Sinc}\,at * \text{Sinc}\,bt$ چه بوده

از تابع بدست آمده بالا عکس تبدیل فوریه می‌گیریم:

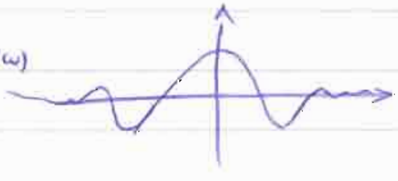
$$\boxed{\frac{1}{a}\,\frac{\sin \pi bt}{\pi bt} = \frac{1}{a}\,\text{sinc}\,bt}$$

$\text{sinc}\,8t * \text{sinc}\,3t = 1/8\ \text{Sinc}\,3t$

$\text{sinc}\,3t * \text{Sinc}\,3t = 1/3\ \text{Sinc}\,3t$

پس چون بدست آوردن کانولوشن فوق در حوزه زمان [illegible] سخت بود در فوریه بدست آوردیم عکس گرفتیم.

$|\text{sinc}\,t| \notin L^1 \rightsquigarrow$ نامحدود $S(\omega)$



$|\text{Sinc}^2 t| \in L^2 \rightsquigarrow$ محدود

$\int |x(t)|\,dt < \infty \in L^1 \qquad \int |x(t)|^2\,dt < \infty \in L^2$

ضرب در حوزه زمان:

$x_1(t) \cdot x_2(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * x_2(\omega)$

اگر ω را برحسب f بنویسیم: $\longrightarrow x_1(f) * x_2(f)$

تبدیل فوریه بیابید؟

$\text{sinc}^2 t \longrightarrow \Lambda(f)$

$x_1(t) = \Lambda(t)$

$\Lambda(t) \longrightarrow \text{sinc}^2(f) \xrightarrow{\text{یا}} \sin^2 f$

$x_1(t) = \Lambda(t) \longrightarrow \sin^2 f = \text{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$

$$\begin{tikzcd} e^{-|t|} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \frac{\textcircled{2}}{1+\omega^2} \arrow[dl] \\ \frac{2}{1+t^2} \arrow[r] & 2\pi e^{-|-\omega|} \end{tikzcd}$$

$(*)\ x_2(t) = \frac{\textcircled{1}}{1+t^2} \longrightarrow (*)\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}$

$$\begin{tikzcd} \text{Sgn}\,t \arrow[r] & \frac{2}{j\omega} \arrow[dl] \\ \textcircled{1}\ \frac{\cancel{2}}{\textcircled{j}t} \arrow[r] & 2\pi\,\text{Sgn}(-\omega) \end{tikzcd}$$

$-\cancel{2}\pi\,\text{Sgn}(\omega)$

$x_3(t) = \frac{1}{\textcircled{2}\textcircled{\pi}t} \longrightarrow \frac{1}{\textcircled{2}\textcircled{\pi}j\textcircled{1}}\pi\,\text{Sing}(\omega)$

$\longrightarrow \frac{1}{j}\text{Sgn}(\omega) = \boxed{-j\,\text{Sgn}(\omega)}$

$x_4(t) = \frac{1}{3+jt} \longrightarrow 2\pi e^{3\omega}u(-\omega)$

$$\begin{tikzcd} e^{-3t}u(t) \arrow[r] & \frac{1}{3+j\omega} \arrow[dl] \\ \frac{1}{3+jt} \arrow[r] \arrow[u, dashed] & 2\pi e^{3\omega}u(-\omega) \end{tikzcd}$$

$x_5(\omega) = u(\omega) \rightsquigarrow x_5(t) = ?$

$x(t) = \frac{-1}{2\pi j t} + \frac{1}{2}\delta(t)$

$$\begin{tikzcd} u(t) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \arrow[dl] \\ \frac{1}{jt} + \pi\delta(t) \arrow[r] \arrow[d] & 2\pi\,u(-\omega) \arrow[d] \\ \frac{-1}{jt} + \pi\delta(t) \arrow[r] & \textcircled{2\pi}u(\omega) \end{tikzcd}$$

این صورت سوال نیست پس این طرف را $\frac{1}{2\pi}$ ÷ کن

Subject: HW Q
Year. Month. میانترم
Fall 2003 امیرکبیر
Fall 2010
Date.

schums series in signal & system

Proakis
فصل اول ← DSP oppenheim

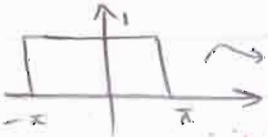
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\omega)|^2 d\omega$$ ۱۵، خاصیت پارسوال

حالت کلی ←
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, Y^*(\omega)\, d\omega$$

مثال: انرژی سیگنال $x(t) = \text{Sinc}\,t$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[F\left\{\text{sinc}\,t\right\}\right]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1)^2 d\omega = 1$$



$\rightsquigarrow \text{sinc}\, t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

سؤال $\underline{255}$: $x(t) \geqslant 0$ ، $y(t) \geqslant 0$ ، $x, y \in L^2$ ← از نوع انرژی
برق 86

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f) + y(f)|^2 df \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df$$

$$(2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f) + y(f)|^2 df \geqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |y(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) + y(t)|^2 dt \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

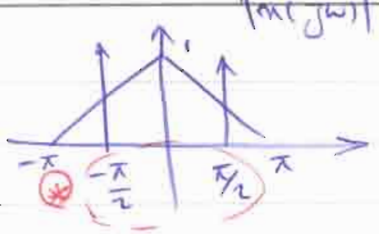
هر دو بزرگتر از صفرند ← $a^2 + b^2 \geqslant a^2$ ← (1) درست است .

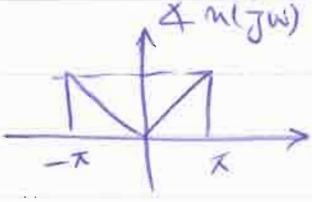
$$\left.\begin{aligned} &\int |x(f) + y(f)|^2 df \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df \\ &\int |x(f) + y(f)|^2 df \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |y(f)|^2 df \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow 2\int |x(f) + y(f)|^2 df \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df + \int |y(f)|^2 df$$

۸۴ . (۲) درست ← $\int |x(f) + y(f)|^2 df \geqslant \frac{1}{2}\left[\int |x(f)|^2 df + \int |y(f)|^2 df\right]$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )





سؤال 214 / سراسری 83 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \longrightarrow \infty \checkmark$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \times$$

$x(t) \longrightarrow$ حقیقی ✗

$x(t) \longrightarrow$ مختلط ✓

(*) از cos $\frac{\pi}{2}$ یعنی [illegible] که
چون هم ضربه است هم قرینه ضربه

سیگنالی که sin و cos است انرژی بی نهایت دارد.

سیگنال های متناوب انرژی بی نهایت دارند.

$x(t) \longrightarrow x(\omega)$

سراسری 88 / 322 :

$? \longrightarrow x^*(3-2\omega)$

$X(\omega) \longrightarrow X(\omega+3) \longrightarrow x(2\omega+3) \longrightarrow X(-2\omega+3)$

$x(t) \longrightarrow e^{-j\omega 3t} x(t) \longrightarrow \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{2}t} x(\frac{t}{2}) \longrightarrow$ Ⓐ

$\longrightarrow x^*(-2\omega+3$

Ⓐ $= \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{2}t} x(-\frac{t}{2}) \longrightarrow \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{2}t} x^*(\frac{t}{2})$

Subject:
Year: ۹۰ Month: ۷ Date: ۱

ــ جلسه یازدهم ــ

② → $y(t) = x(t+1/2)$

$$Y(\omega) = e^{+j\omega 1/2} X(\omega) \rightsquigarrow -\frac{\omega}{2} = 4\, x(\omega)$$

③ $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 5$ خود سؤال اشتباه کرده
باید 5 می‌شود در صورت سؤال

$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega)\,d\omega = 2\pi$ داره سؤال ④ → دارد.

ــ جلسه دوازدهم ــ

تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$x(t) = x(t+T)$

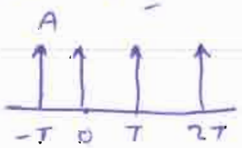
$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \qquad \frac{2\pi}{\omega_0} = T$$

سیگنال ← متناوب: سری فوریه - تبدیل فوریه

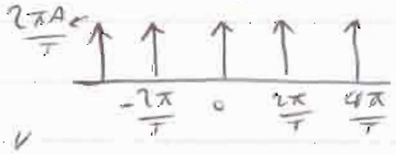
↙ غیرمتناوب: تبدیل فوریه

سیگنالی که قطار ضربه دارد سیگنال متناوب است.

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\delta(t-kT) \qquad T,\ a_k = \frac{A}{T}$$



$$x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{A}{T}\, \delta\!\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

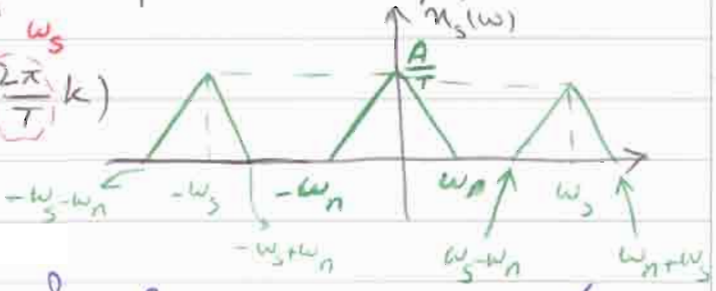


سیگنال متناوب سری فوریه متناوب دارد.

$$\rightarrow x(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * p(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X\left(\omega - \overset{\omega_s}{\boxed{\frac{2\pi}{T}}} k\right)$$



$$\boxed{\begin{gathered}\omega_s - \omega_n \geqslant \omega_n \\ \omega_s \geqslant 2\omega_n\end{gathered}}$$

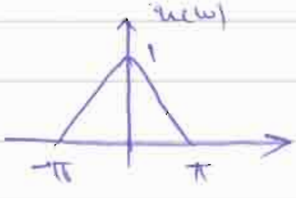
برای اینکه سیگنال‌ها با هم برخورد نداشته باشند لازم است:

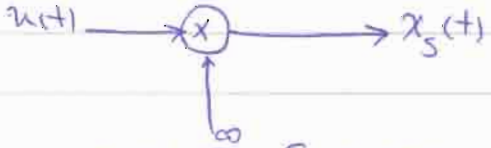
ω_s سیگنال نمونه‌برداری است. اگر شرط فوق برقرار باشد می‌توان

شکل سیگنال اصلی را بدست آورد. یعنی سیگنال اصلی را بازسازی کنیم.

ω_n ← فرکانس قطع سیگنال $x(t)$ است.

فرض $X(\omega)$ به شکل زیر باشد ، $x(t)$ چگونه بوده است ؟





$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$x_s(\omega) \;\Big|\; = ?$

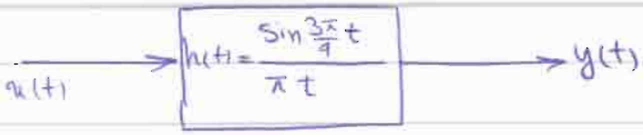
$T_1 = 1^s \rightarrow \omega_{s_1} = 2\pi$

$T_1 = 2^s \rightarrow \omega_{s_1} = \pi$

$x(t) = \mathrm{Sinc}^2 T$

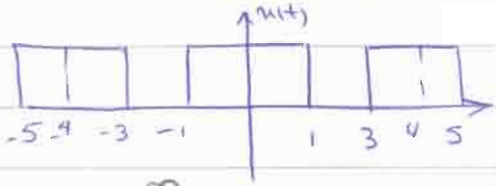
$$X_{s_1}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} X(\omega - k2\pi)$$

$$X_{s_2}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_2} x(\omega - k\pi)$$



197
84 ٪

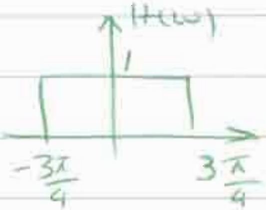
$y(t)=?$



مثال مربوط :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\delta(t-2k\cancel{\pi}) \xrightarrow{a_k=\frac{3}{2}} \frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}3\cos k(\pi)$$

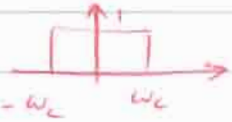
$\omega_0=\pi$



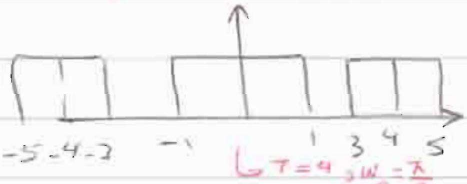
$$=\frac{3}{2}+3\cos\pi t+3\cos 2\pi t+3\cos 3\pi t+\cdots$$

$$y_1(t)=\underset{H(j0)}{\frac{3}{2}(1)}+\underset{H(j\pi)}{0}+\underset{H(j2\pi)}{0}$$

$$\frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} \rightsquigarrow$$



حل تست 197 :



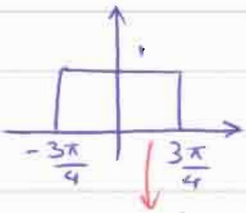
$\hookrightarrow T=4,\ \omega_0=\frac{\pi}{2}$

$$\rightsquigarrow a_k=\frac{(1)(2)}{4}\operatorname{sinc}\frac{k(2)}{4}$$

$$\longrightarrow a_0=1/2 \quad , \quad x_2(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\frac{k}{2}\cos k\frac{\pi}{2}t$$

$$=\frac{1}{2}+\operatorname{sinc}\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}t+\underbrace{\operatorname{sinc}1\cos\pi t+\cdots}_{\text{by pass}}$$

$H(j\pi)=0$



حذف dc است

تا زمانی صفر است

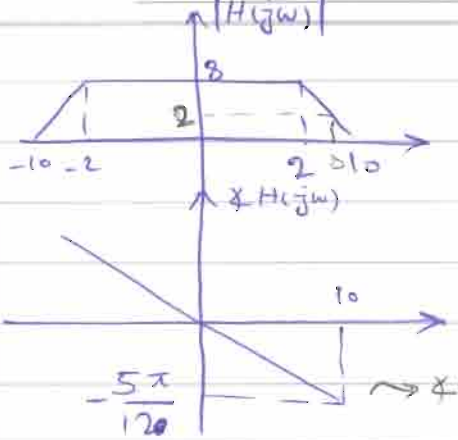
$$y(t)=\frac{1}{2}+(\operatorname{sinc}\frac{\pi}{2})|H(j\frac{\pi}{2})|\cos(\frac{\pi}{2}t+\measuredangle H(j\frac{\pi}{2}))$$

$$=\frac{1}{2}+\operatorname{sinc}\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}t=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t$$

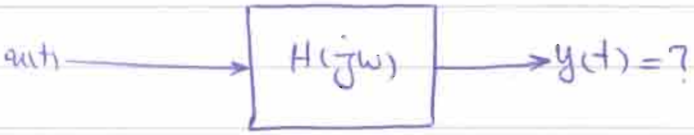
گزینه ۴

83

سراسری ۸۱



$\rightsquigarrow \measuredangle H(j\omega) = -\frac{5\pi}{120}\omega$



$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{\pi}{4})$

$\omega_0 = 8, \; T = \frac{\pi}{4}$

تست ۱ و ۳ ← چون cos(4t) اصلاً ایجاد نمی‌شود و cos16t ها هم در Hj16 ضرب می‌شود

رد می‌شود چون cos 4t نداریم و در $0 = H j16 \times \cos 16$

$a_k = \frac{A}{T} = \frac{1}{\pi/4} = \frac{4}{\pi}$

$x(t) = \frac{4}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi}\cos k(8)t = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\cos 8t + \frac{8}{\pi}\cos 16t + \cdots$

$\frac{4}{\pi} H(j0) = \frac{32}{\pi}$

$\frac{8}{\pi} \cancel{|H(j8)|^2} \cos(8t + \measuredangle H(j8))$ $-\frac{\pi}{3}$

by nasi

$\rightsquigarrow y(t) = \frac{32}{\pi} + \frac{16}{\pi}\cos(8T - \frac{\pi}{3})$

$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\measuredangle H(j\omega)} = \boxed{8}$

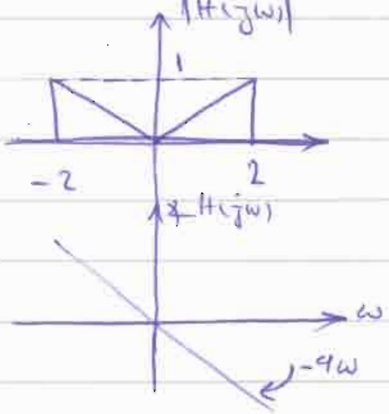
$\measuredangle H(j\omega) = -\frac{5}{120}\omega \xrightarrow{\omega = 8} -\frac{\pi}{3}$

group delay : یعنی!

$\omega = 2 \longrightarrow |H(j2)| = 2 \qquad \measuredangle H(j2) = -6 + \frac{\pi}{2}$

$\sin 2t \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow 2\sin(2t + \frac{\pi}{2} - 6)$

از صدر $\rightsquigarrow \quad H(j\omega) = \underbrace{j\omega}_{\text{مشتق گرفته}} \underline{e^{-j\boxed{3}\omega}} \rightsquigarrow (\sin 2t)' = 2\cos_{\hat{2}}(t-3)$



380 / سراسری 89 ،

$x(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow$

$x(t) = \sin(\frac{t}{2})$

$\downarrow \omega = 1/2$

پس در باند عبور موجود است.

١) $\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}-1)$

٢) $\frac{1}{4}\sin(\frac{t}{2}-1)$

٣) $\frac{1}{4}\sin(\frac{t}{2}-2)$ ✓

۴) $\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}-2)$

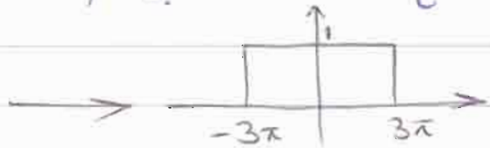
$y(t) = 1\,(|H(j1/2)|)\ \sin(\frac{t}{2} + \measuredangle H(j\frac{1}{2}))$

$= 1(\frac{1}{4})\sin(t/2 - 2)$

385 / سراسری 89 ،

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[2(-1)^k \delta(t - \frac{k}{2}) - \delta(t - \frac{1}{2} - k)\right]$

x(t) که ورودی سیستم فیلتر پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع 3π است، خروجی کدام است.



ورودی شبیه قطار ضربه است.

$x(t) = \cdots + 2\delta(t+1) - \delta(t+\frac{3}{2}) - 2\delta(t+1/2) - \delta(t+1/2) + 2\delta(t)$
$- \delta(t-1/2) - 2\delta(t-1/2) - \delta(t-3/2) + \cdots$

نکته :

$$x(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{H(jw)} \xrightarrow{\quad} y(t)$$

$x(t) \downarrow a_k ; T$ $\qquad$ $y(t) \downarrow b_k$ $\qquad$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$b_k = a_k \cdot H(jk\omega_0)$$

$$\text{if } b_k = 0 \xrightarrow{\qquad} a_k = 0 \quad \text{or} \quad H(jk\omega_0) = 0$$

سراسری 86
258

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \xrightarrow{\quad} \boxed{\begin{array}{c} h(t) = e^{-4t}\,u(t) \\ H(jw) = \frac{1}{jw+4} \end{array}} \xrightarrow{\quad} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{jn\omega_0 t}$$

$b_2 = ?$

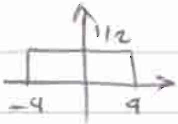
$$a_k = \frac{1}{1} \qquad \omega_0 = 2\pi \qquad T = 1$$

$$b_n = (1)\frac{1}{j(k2\pi)+4} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{j(2)(2)\pi+4} = \frac{1}{j4\pi+4}$$

93
آزاد :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < 4 \\ -1 & 4 \leqslant t < 8 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \boxed{H(jw) = \frac{\sin 4w}{w}} \xrightarrow{\quad} y_k = ? \qquad T = 8$$

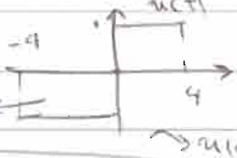
$$H(jw) = \frac{A \sin \frac{w}{2}(T)}{\frac{w}{2}} \rightsquigarrow T = 8 \Rightarrow$$



$$y_k = ? \qquad T = 8 \rightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

$$y_k = x_k \cdot H(jk\omega_0) = x_k \frac{\sin 4(\frac{k\pi}{4})}{k\pi/4} \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \rightarrow y = 0 \\ y_0 = 4\cancel{k_0} = 0 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \rightarrow$$



سطح زیر نمودار صفر است .

$\rightsquigarrow x(0) = 0 \longrightarrow y_0 = 0$

$$\boxed{\forall k \rightarrow y_0 = 0}$$

فقط به a_0 مقدار dc اضافه می‌شود چون در سری فوریه فقط a_0 ، dc حاصل است.

نکته:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-3|t-2k|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3}{k^2\pi^2+9} e^{jk\pi t}$$

$$a_k = ? = \frac{1}{2} \frac{6}{(k\pi)^2+9}$$

$$x_T(t) = e^{-3|t|} \xrightarrow[\omega_0 = \pi]{T=2} X_T(\omega) = \frac{6}{\omega^2+9}$$

$$x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{3}{k^2\pi^2+9} \delta(\omega - k\pi)$$

۱) بررسی خواص سیستم‌ها از روی تبدیل فوریه ورودی - خروجی:

اگر تبدیل فوریه ورودی و خروجی یک سیستم به فرم زیر برقرار باشد، آنگاه حتماً سیستم LTI است:

$$Y(\omega) = X(\omega) . \underbrace{F(\omega)}_{\text{تابع تبدیل} : H(\omega)}$$

مثال) $y(t) = x(2t) \longrightarrow$ LTV

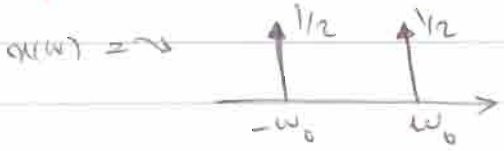
$\longrightarrow y(\omega) = \frac{1}{2} x(\frac{\omega}{2})$ غیر LTI است

$y(t) = x(t-1) + t\,x(t)$ این سیستم مشخص است که خطی TV است.

$y(\omega) = e^{-j\omega} x(\omega) + j \frac{d x(\omega)}{d\omega}$ دیدیم که در تبدیل فوریه نمی‌توان H(ω) را جدا کرد

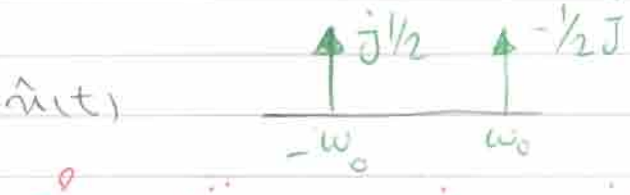
پس غیر LTI است.

مثال) $x(t) = \cos\omega_0 t$ $\qquad \hat{x}(t) = ?$



$\omega > 0 \rightarrow \operatorname{sgn}\omega = 1$

$\omega < 0 \rightarrow \operatorname{sgn} = -1$



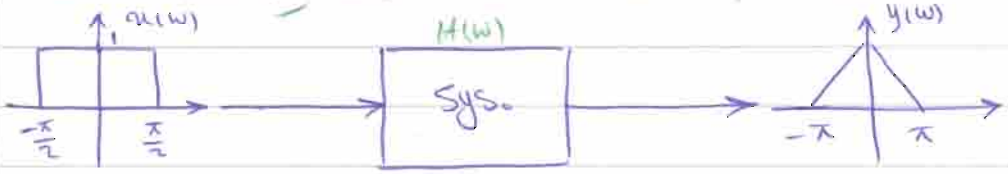
$\rightarrow \hat{x}(t) = \sin\omega_0 t$

۲) در سیستم LTI، خروجی فرکانس جدیدی نسبت به ورودی نخواهد داشت!

$$1+\cos\omega_0 t+\cos 2\omega_0 t \longrightarrow \boxed{\text{Sys.}} \longrightarrow \begin{array}{l} ② \; 4+\cos 3\omega_0 t \; * \\ ① \; 2+\sin\omega_0 t \end{array}$$

اگر ورودی را به سیستم فوق بدهیم و خروجی مطابق با * شود، سیستم لزوماً غیر LTI است.

② → لزوماً غیر LTI $\qquad$ ① → می‌تواند LTI باشد



این سیستم لزوماً غیر LTI است چون جاهایی که X(ω) صفر است Y(ω) ≠ 0 است.

یا اگر پهنای باند خروجی بزرگتر از پهنای باند ورودی باشد → لزوماً غیر LTI است.

$$\text{Sinct} \longrightarrow \boxed{A} \xrightarrow{\text{Sinc}2t} \boxed{B} \longrightarrow \text{Sinct}$$

سراسری $\frac{190}{89}$:

کدام سیستم می‌تواند LTI باشد؟

۱) A $\qquad$ ۲) B ✓ $\qquad$ ۳) هر دو $\qquad$ ۴) هیچکدام

Year ۹۵ Month ۷ Date ۱

ـ جلسه سیزدهم ـ

$$\left.\begin{array}{l} x(t)\longrightarrow X(\omega)\\ \\ x^*(t)\longrightarrow X^*(-\omega)\end{array}\right\}\xrightarrow[x(t)]{\text{حقیقی}} X^*(-\omega)=X(\omega)$$

or

$$X^*(\omega)=X(-\omega)$$

$$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\longrightarrow\frac{X(\omega)+X(-\omega)}{2}\underset{x(t):\,\text{Real}}{=}\frac{X(\omega)+X^*(\omega)}{2}$$

$$=X_R(\omega)=\text{Re}\{X(\omega)\}$$

$$x_o(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}\longrightarrow\frac{X(\omega)-X(-\omega)}{2}$$

یعنی:

$$\underline{x(t):\text{Real}}\quad\frac{X(\omega)-X^*(\omega)}{2}=j\,\text{Im}\{X(\omega)\}=j\,X_I(\omega)$$

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$

$$\downarrow F\qquad\quad\downarrow F\qquad\quad\downarrow F$$

$$X(\omega)=\text{Re}\{X(\omega)\}+j\,\text{Im}\{X(\omega)\}$$

توضیح:

تبدیل فوریه قسمت زوج یک سیگنال برابر قسمت حقیقی تبدیل فوریه خود سیگنال F^{-1} قسمت

حقیقی یک تبدیل برابر قسمت زوج یک سیگنال است.

غیرحقیقی: زوج $x(t)=x(-t)$ ، فرد

حقیقی و زوج

فرد

$$x_e(t)\longrightarrow X_e(\omega)$$

$$x_o(t)\longrightarrow X_o(\omega)$$

یادآوری $\delta(t-t_0) \rightsquigarrow e^{-j\omega t_0}$ $\to F^{-1} = h_e(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$

$$\rightsquigarrow h(t) = \begin{cases} 2h_e(t) & t>0 \\ A\delta(t) & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = \begin{cases} \delta(t-1) & t>0 \\ 0 & t\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow h(t) = \delta(t-1) \rightsquigarrow \boxed{h(t=1/2) = 0}$$

مثال) $\mathrm{Re}\{H(\omega)\} = \frac{\omega^2+5}{\omega^2+4} \xrightarrow[C.T.]{\text{سیستم علی و حقیقی}} h(t) = ?$

$$H_R(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega^2+4} \xrightarrow{F^{-1}} \delta(t) + \frac{1}{4}e^{-2|t|} = h_e(t)$$

$$\rightsquigarrow h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

حوزه زمان	حوزه فرکانس
1	$2\pi\delta(t)$
$\delta(t)$	1

LTI علی , $h_e(t)$: $\frac{319}{\text{سراسری 88}}$
$h_o(t)$

$$H_e(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} h_e(t)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(j\omega)\,d\omega = 0$

۱) $h(t) = h_e(t)\cdot u(t)$

۲) $h(t) = 2h_o(t)\cdot u(t)$

۴) $h(t) = 2h_e(t)\cdot u(t)$ ✓

۳) $h(t) = h_o(t)\cdot u(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(j\omega)\,d\omega = 0 = 2\pi h_e(0)$$

$\rightsquigarrow h_e(0) = 0$ یعنی در مبدأ ضربه ندارد.

$h_e(t) = \frac{h(t)+h(-t)}{2} \to 0$

$h_o(t) = \frac{h(t)-h(-t)}{2}$

با فرض اینکه سیگنال علی است و در مبدأ ضربه ندارد (مقدار ندارد.

$\rightsquigarrow h_e(t) = h_o(t)$

حتی نزنید در هم می‌تواند درست باشه

برای اینکه بدانیم سیستم
حافظه‌دار
پایدار
علی
است یا خیر باید به حوزه زمان برویم.

285
سراسری 89 : $y(t) = x(t-1) + x(t+1)$ بدون حافظه، تغییرناپذیر با زمان؟

تغییرپذیر با زمان است زیرا نمی‌توان t را از عقب جدا کرد. برای حافظه به حوزه زمان می‌رویم.

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}x(t) + e^{-j\omega_0 t}x(t) = 2\cos\omega_0 t . x(t)$$

معکوس‌پذیر - پایدار - علی - بدون حافظه - تغییرناپذیر با زمان
✗ ✓ ✓ ✓ ✗

106
سراسری 82 : $y(j\Omega) = e^{j2\Omega}X(j\Omega) + j\frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$ خطی ✓، TI ✗، علی ✗؟

y برحسب x خطی است پس خطی است ولی نمی‌توان $x(j\Omega)$ را شیفت بدهیم پس TV است.

برای علی در حوزه زمان می‌رویم: $\rightsquigarrow y(t) = x(t+2) + t x(t)$

ناپایدار است.

یادآوری $x(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega_0 t_0} \times x(\omega)$

برای اثبات معکوس‌پذیری یا عدم معکوس‌پذیری باید در حوزه زمان برویم.

118
سراسری 82 : C.T. (پیوسته) و LTI است. علی ✗ - پایدار - معکوس‌پذیر؟ $H(\omega) = \cos\omega$

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \rightsquigarrow h(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

غیرعلی است چون در $t<0$ مقدار دارد. پایدار است. شرط بدون حافظه:

$h(t) = k\,\delta(t)$

این شرط برقرار نیست پس حافظه‌دار است.

حالت دوم: سیستم فقط خطی باشد؟

$y(t) = x(t+2) + t\,x(t)$

$$\rightsquigarrow Y(\Omega) = e^{j2\Omega} X(\Omega) + j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

$$y = 0 = e^{j2\omega} x(\omega) + j x'(\omega) \rightsquigarrow \int \frac{x'(\omega)}{x(\omega)} = \int j e^{j2\omega}$$

$$\longrightarrow \ln x(\omega) = \frac{1}{2} e^{j2\omega}$$

یعنی برای این سیستم خطی دو ورودی مختلف وجود دارد که یک خروجی صفر می‌دهد پس معکوس ناپذیر است.

یعنی همین اشکال است که اگر به ورودی بدهیم $y=0$ ، اگر ورودی را صفر هم بدهیم خروجی صفر می‌شود.

$\text{LTI}: \; h(f) \longrightarrow h(t)$

$\frac{248}{86 \text{ سراسری}}$:

کدام خاصیت علیت را ایجاب می‌کند؟

$$\hat{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$$

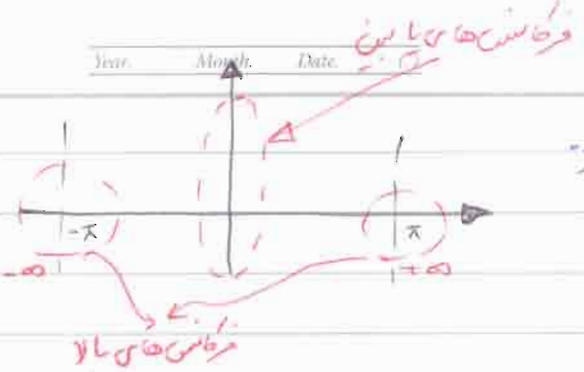
برای علّی بودن داریم $\rightsquigarrow$ $h(t) = h(t) \cdot u(t)$

$$\downarrow f$$

$$H(f) = H(f) * \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{H(f) = \frac{1}{2j}\hat{H}(f) + \frac{1}{2}H(f)}$$

گزینه ②

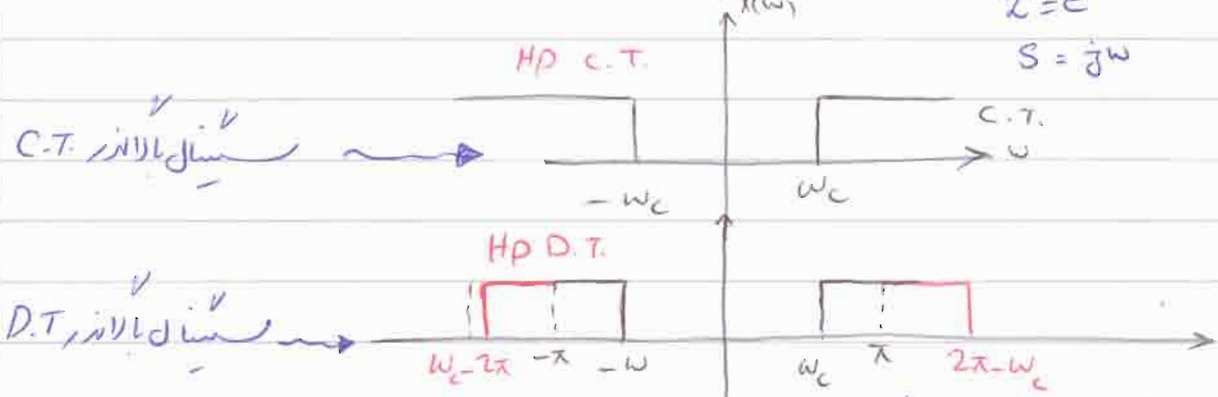


فرکانس صفر در .D.T و .C.T باهم برابرند.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$z = e^{j\omega}$$

$$S = j\omega$$



تبدیل فوریه سیگنال گسسته متناوب است. (ω) دارای سری فوریه است. البته این نکته فقط در .D.T صادق است.

تبدیل فوریه .D.T سیگنال های معروف:

۱) ضربه

$$\begin{cases} x[n] = \delta[n] \longrightarrow X(\omega) = 1 \\ \delta[n-n_0] \longrightarrow e^{-j\omega n_0} \end{cases}$$

۲)

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

اثبات : $X(e^{j\omega}) = \sum_{\underbrace{n=0}_{u[n]>0}}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \longrightarrow$

$$a^{|n|} \longrightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos w} \qquad e^{-a|t|} \longrightarrow \frac{2a}{a^2+w^2}$$

$$x(w) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jwn} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-jwn}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a^{n} e^{jwn}}_{} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^{n} e^{-jwn}}_{}$$

$$= ae^{jw} + a^2 e^{2jw} + \cdots \qquad = 1 + ae^{-jw} + a^2 e^{-j2w} + \cdots$$

$$= \frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}} \quad ① \qquad = \frac{1}{1-ae^{-jw}} \quad ②$$

$$|ae^{jw}| < 1 \rightsquigarrow a<1 \qquad |ae^{-jw}|<1 \rightsquigarrow |a|<1$$

$$①,② \longrightarrow \frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}} + \frac{1}{1-ae^{-jw}} = \boxed{\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos w}}$$

مثال، $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \longrightarrow \frac{1-1/4}{1+1/4-\cos w} = \frac{3}{5+4\cos w}$

ممکن است $\frac{3}{5-4\cos t}$ را بدهند سری فوریه بخواهند می‌توان از دوگانی رفت

حقیقی بودن $h(t)$ $\quad Re\{H(\omega)\} \xrightarrow{F^{-1}} h_e(t)$

$$h(t)=\begin{cases}2h_e(t) & t>0\\ A\delta(t) & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

اگر $h_e(t)$ در صفر ضربه داشت $\underline{\underline{x2}}$ نمی‌شود.

سؤال 82، سراسری 81:

$Re\{H(\omega)\}=H_R(\omega)=\pi\delta(\omega)$ $\qquad h(t)=?$

$\pi\delta(\omega)\xrightarrow{F^{-1}}\frac{1}{2}=h_e(t)$

$h(t)=2h_e(t)=1u(t)\longrightarrow$ چون علی است

$\big\downarrow F$

$H(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

$Re\{H(\omega)\}=\cos\omega \qquad h(\frac{1}{2})=?$ $\qquad$ سؤال ۹۰ آزاد 81،

$\cos\omega\xrightarrow{F^{-1}}h_e(t)=\frac{1}{2}\delta(t+1)+\frac{1}{2}\delta(t-1)$ ، $\delta(t-t_0)\rightarrow e^{-j\omega}$

$\downarrow$

$\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$

$$h(t)=\begin{cases}2h_e(t) & t>0\\ A\delta(t) & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}=\begin{cases}\delta(t-1) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$h(t)=\delta(t-1)$ $\qquad h(\frac{1}{2})=$ صفر

$Re\{H(\omega)\}=\frac{\omega^2+5}{\omega^2+4}\xrightarrow[C.T]{\text{سیستم علی حقیقی}}h(t)=?$ $\quad$ سؤال نمونه:

نکته) وقتی سیستم در حوزه فوریه خطی باشد برای تعیین LTI یا TV بودن بودن باید در زمان بررسی کنیم.

مثال) $y(w) = x^2(w)$ NLTV

$$y(t) = x(t) * x(t)$$

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t)$$

$$\delta(t-2) = \delta(t-1) * \delta(t-1)$$

مثال) $y(t) = e^{j\omega_0 t} x(t)$. خطی - TV، بی حافظه، علی، پایدار است.

$$|y(t)| = \underbrace{|e^{j\omega_0 t}|}_{=1} |x(t)| \rightarrow$$ پایدار است

$y(t) = f(t) \cdot x(t)$ [illegible] $f(t) \neq 0$ شرط معکوس پذیری، شرط معکوس پذیره پس صفر نمی‌شود $e^{j\omega_0 t}$

در حوزه فوریه
حافظه
پایداری
علی
به حوزه زمان می‌رود.

مثال 285، سراسری 87:

$$y(t) = x(t-1) + x(t+1)$$

پایدار ✓ - علی ✓ - خطی ✓ - بدون حافظه ✓ -

تغییر ناپذیری با زمان X

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} x(t) + e^{-j\omega_0 t} x(t)$$

$$= \underbrace{2\cos \omega_0 t}\, x(t)$$

در لحظات $\frac{\pi}{2}$ صفر است → معکوس ناپذیر

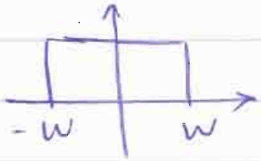
۱۰۳

$$H_1(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \xrightarrow{\text{معکوس پذیر}} H_I(\omega) = 1 + j\omega$$

$$h_1^{-1}(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

اگر برای این سیستم ورودی بدهیم خروجی خود ورودی + مشتق ورودی می‌شود.

$H_2(\omega)$



چون در بعضی فرکانس‌ها صفر است $\xrightarrow{\text{معکوس ناپذیر}}$

حالت دوم: سیستم فقط خطی باشد:

$$y(t) = x(t+2) + t\,x(t)$$

$$y(\omega) = e^{j2\omega} X(\omega) + j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

$$0 = e^{j2\omega} X(\omega) + jX'(\omega) \Rightarrow \int \frac{X'(\omega)}{X(\omega)} = \int j e^{j2\omega}$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ln} X(\omega) = \frac{1}{2} e^{j2\omega} \longrightarrow$$ معکوس ناپذیر

← یعنی برای این سیستم دو ورودی مجزا وجود دارد که خروجی را صفر می‌کند

سوال 248 : سراسری 86 :

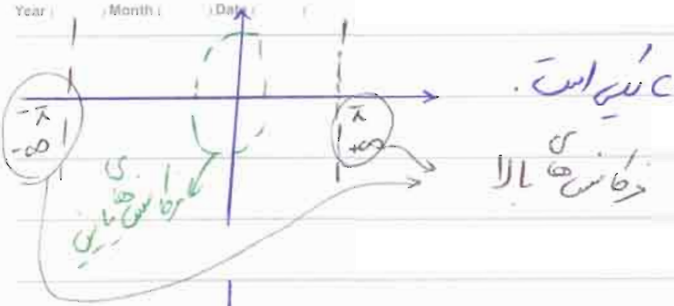
$LTI : H(f) \longrightarrow h(t)$

$\hat{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$ → هیلبرت در حوزه

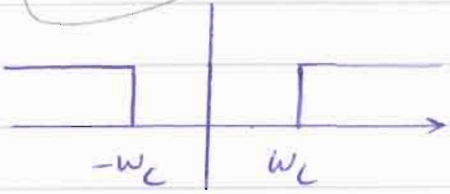
→ علی : $h(t) = h(t).u(t)$

$$H(f) = H(f) * \left(\frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right)$$

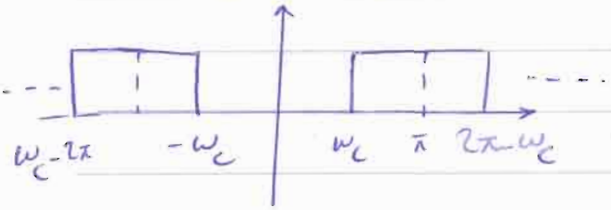
10K



نکته: فرکانس صفر D.T در C.T نیز است.



C.T ✓ فیلتر بالاگذر پیوسته Hp.C.T



Hp.D.T → فیلتر بالاگذر گسسته

اگر C.T بود میان‌گذر بود

نکته: تبدیل فوریه سیگنال گسسته متناوب است. (یعنی دارای سری فوریه است)

تبدیل فوریه D.T سیگنال های معروف:

$$x[n] = \delta[n] \qquad 1 = X(\omega)$$

$$\delta[n-n_0] \longrightarrow e^{j\omega n_0}$$

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |a|<1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$= 1 + ae^{-j\omega} + a^2 e^{-j2\omega} + \cdots = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad |ae^{-j\omega}|<1$$

$$|a|<1$$

$$= (ae^{jw} + a^2 e^{j2w} + \dots\dots) + (1 + ae^{-jw} + a^2 e^{-2jw} + \dots\dots)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$|a|<1 \quad \frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}} \qquad\qquad |a|<1 \quad \frac{1}{1-ae^{jw}}$$

$$\longrightarrow X(w) = \frac{ae^{jw}}{1-ae^{jw}} + \frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

مثال مهم) فوریه : $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \longrightarrow \frac{1-1/4}{1+\frac{1}{4}-\cos w} = \frac{3}{5-4\cos w}$$

مثلا $\frac{3}{5-4\cos w}$ می‌دهد فوریه‌ی چی خواهد.

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-ae^{-jw}} \qquad |a|<1$$

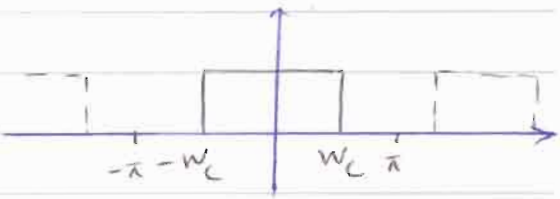
$$a=1 \longrightarrow u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-jw}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta(w-2k\pi)$$

$$x[n]=1 \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(w-2k\pi)$$

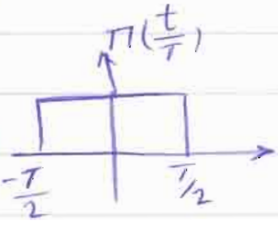
$$x[n] = \cos w_0 n \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(w+w_0-2k\pi) + \pi\delta(w-w_0-2k\pi)$$

$$x[n] = \sin w_0 n$$

$$x[n] = \frac{\sin w_c n}{\pi n} \longrightarrow$$



یادآوری :



$$\longrightarrow A\,\frac{\sin \frac{w}{2}(T)}{\frac{w}{2}}$$

۳) شیفت در فرکانس:

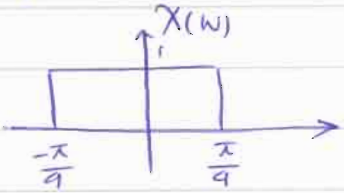
$$e^{j\omega_0 n}x[n] \longrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 n\, x[n] \longrightarrow \frac{1}{2j}X(\omega-\omega_0)-\frac{1}{2j}X(\omega+\omega_0)$$

$$\boxed{\text{if } \omega_0=\pi \longrightarrow (-1)^{\pi}x[n] \longrightarrow X(\omega-\pi)}$$ مهم

$$\begin{cases} x[n] & n:\text{even} \\ -x[n] & n:\text{odd} \end{cases}$$

مثال)



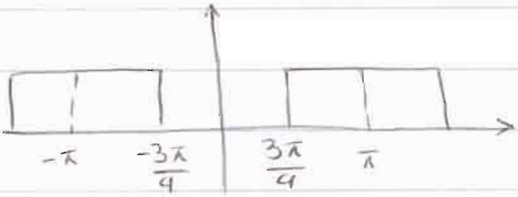
$$\longrightarrow y[n]=(-1)^n x[n]$$

$$y(\omega)=?$$

نکته: اگر یک سیستم پایین گذر را در $(-1)^n$ ضرب کنیم بالاگذر می‌شود.

$$x[n]=\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}$$

$$y(\omega)=X(\omega-\pi)$$



مثال) $$y[n]=\begin{cases} x[n] & n:\text{even} \\ 2x[n] & n:\text{odd} \end{cases}$$

$$\longrightarrow y[n]=x[n]\cdot\underbrace{\begin{cases} 1 & n:\text{even} \\ 2 & n:\text{odd} \end{cases}}_{\frac{1+2}{2}+\frac{1-2}{2}(-1)^n}$$

$$y[n]=\frac{3}{2}x[n]-\frac{1}{2}(-1)x[n]$$

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-jw}}$$

$$n a^n u[n] \longrightarrow j \frac{-aje^{-jw}}{(1-ae^{-jw})^2} = \frac{ae^{-jw}}{(1-ae^{-jw})^2}$$

دقت در سریِ مخرج به توان 2 بود در زمان n ضرب شده است.

$$(n+1)a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-jw})^2}$$

سوال 78 سراسری 81: تبدیل فوریه؟

$$x[n] = 4^{-n} u[n+2]$$

$$x[n] = 4^{-(n+2-2)} u[n+2]$$

$$x[n] = 16\left[4^{-(n+2)} u[n+2]\right] = 16\, y[n+2]$$

$$y[n] = 4^{-n} u[n] \longrightarrow y(w) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}$$

$$X(w) = 16e^{j2w} \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}$$

تمرین: $x[n] = n4^{-n} u[n+2]$

سوال 91 ـ سراسری 81:

$$y[n] = x[1-n] + x[-1-n]$$

$$Z[n] = x[n-1] + x[n+1] \longrightarrow y[n] = Z[-n] \longrightarrow y(w) = Z(-w)$$

$$Z(w) = e^{-jw} X(w) + e^{jw} X(w) = 2\cos w\, X(w)$$

$$\longrightarrow \boxed{y(w) = 2\cos w\; X(-w)}$$

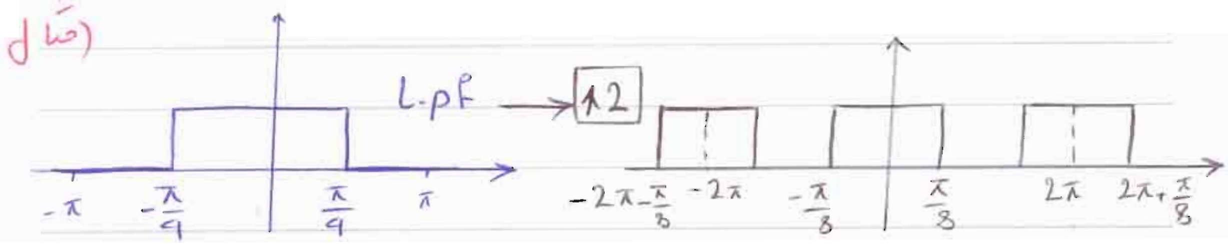
۱۷ up-sampler :

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow M} \longrightarrow y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & n : m \text{ مضرب} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$Y(w) = X(Mw)$$

$X(2w) \rightsquigarrow$ روی محور w تقسیم بر 2

مثال)



۱۸ Down sampler

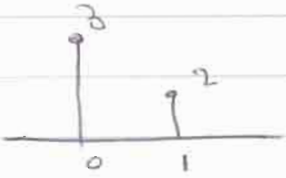
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n] = x[Mn]$$

$$Y(w) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{w-2k\pi}{M}\right)$$

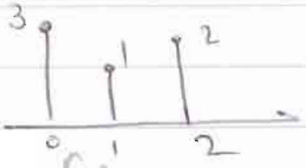
مثال)

$$y[n] = x[2n] \longrightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{1}{2} X\left(\frac{w-2\pi}{2}\right)$$

$$y[n] = x[3n] \longrightarrow \frac{1}{3} X\left(\frac{w}{3}\right) + \frac{1}{3} X\left(\frac{w-2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} X\left(\frac{w-4\pi}{3}\right)$$



$y[n] = x[2n]$ تمرین) فوریه‌ی $x[n]$



$\rightarrow x[n]$

$$a_k = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5-4\cos k\pi} \qquad a_0=\frac{3}{2}\ ,\ a_1=\frac{1}{6}$$

انرژی این سیگنال متناوب بی‌نهایت است.

$$P_x = |a_0|^2+|a_1|^2 = \frac{82}{36} = \boxed{\frac{41}{18}}$$

مثال/

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-(n-3m)}\,u[n-3m]$$

$$X(w)=? \qquad a_k=? \qquad P_x=?$$

$$x_N[n]=2^{-n}u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad \boxed{N=3}$$

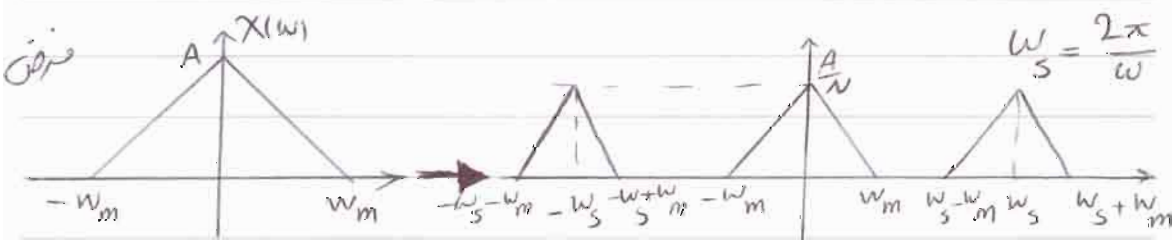
$$a_k=1/3\ ---$$

✓

تبدیل فوریه سیستم نمونه‌بردار D.T :

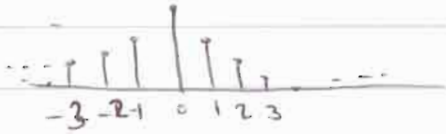
$$\begin{tikzcd} x[n] \arrow[r] & \bigotimes \arrow[r] & x_s[n]=x[n]\cdot p[N] \\ & p[n]=\sum_{k=\infty}^{+\infty}\delta[n-kN] \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$x_s(w)=\frac{1}{2\pi}X(w) * \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi\frac{1}{N}\,\delta(w-kw_0)$$



$$2w_m < w_s$$

$R_{xx}[n]$



نکته: یک سیگنال اتوکورلیشن در صفر بیشترین مقدار را دارد.

نکته:

$$x(w) \xrightarrow{} \underset{H(w)}{\overset{LTI}{\boxed{H(w)}}} \xrightarrow{} y(w) = X(w) \cdot H(w)$$

$$|y(w)|^2 = |X(w)|^2 |H(w)|^2 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} R_{yy}[n] = R_{xx}[n] * h[n] * h[-n]$$

سؤال 327، سراسری 88:

$$x[n] = \begin{cases} 15-n & 0 \leqslant n \leqslant 15 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$y(e^{jw}) \triangleq |X(e^{jw})|^2 \longrightarrow y[12] = ?$$

$$y(w) = |X(w)|^2 = X(w) \cdot X^*(w)$$

$R_{xx}[12]$

$$y[n] = x[n] * x[-n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,x[k-n]$$

$$y[12] = \sum_{\underset{0}{k=-\infty}}^{\overset{14}{+\infty}} x[k]\,x[k-12] = x[12]x[0] + x[13]x[1] + x[14]x[2]$$

قبل از 12 طبق صورت سؤال x[k-12] مقدار صفر دارد.

$$y[12] = 45 + 28 + 13 = 86$$

اگر y[0] را بخواهد طبق اتوکورلیشن بیشترین مقدار را دارد.

Year ۹۰ Month ۷ Date ۸ — جلسه چهاردهم —

مثال

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})\, Y(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta = 1 + e^{-j\omega}$$

$y[n] = (-1)^n$ $\qquad$ $x[n] = ?$

باید F^{-1} بگیریم :

$$x[n] \cdot y[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$x[n](-1)^n = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$x[n] = (-1)^n \{\delta[n] + \delta[n-1]\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f[n] \cdot \delta[n] = f[0] \cdot \delta[n] \\ f[n]\, \delta[n-1] = f[1]\, \delta[n-1] \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]}$$

کاربرد تبدیل فوریه D.T. در تحلیل سیستم های LTI :

LTI

$$e^{j\omega_0 n} \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow e^{j\omega_0 n} \cdot H(e^{j\omega_0})$$

$$A \rightarrow \boxed{} \rightarrow A\, H(e^{j0})$$

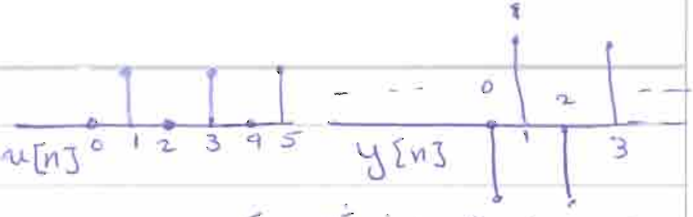
عدد ثابت

اگر $H(e^{j\omega_0})$ صفر باشد به ازای هر ورودی خروجی صفر است. پس معکوس ناپذیر است.

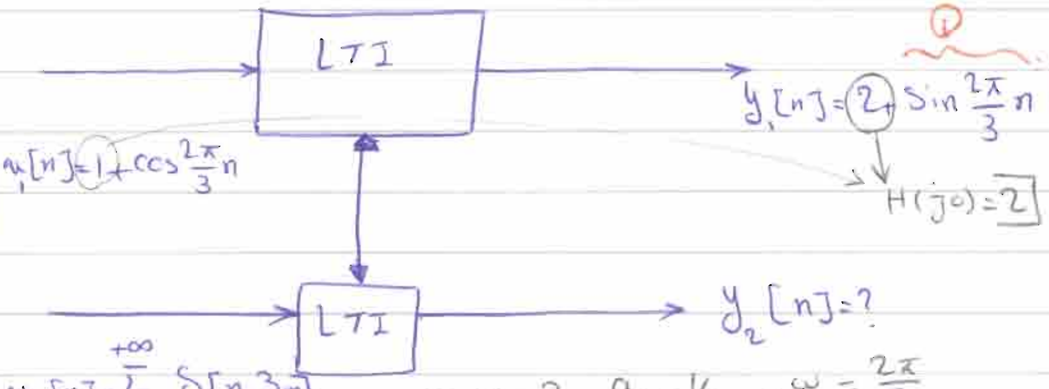
$$a^n \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow H(a)\, a^n$$

$$A\cos(\omega_0 n + \theta) \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \theta + \measuredangle H(e^{j\omega_0}))$$

$\rightarrow y[n] = -e^{j\pi n} = -(-1)^n$



← این شکل همین سیگنال است.



① 325
سراسری ۸۸

$y_1[n] = \textcircled{2} + \sin\frac{2\pi}{3}n$

$x_1[n] = \textcircled{1} + \cos\frac{2\pi}{3}n$

$H(j0) = \boxed{2}$

$y_2[n] = ?$

$x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta[n-3m] \longrightarrow N = 3,\ a_k = 1/3,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

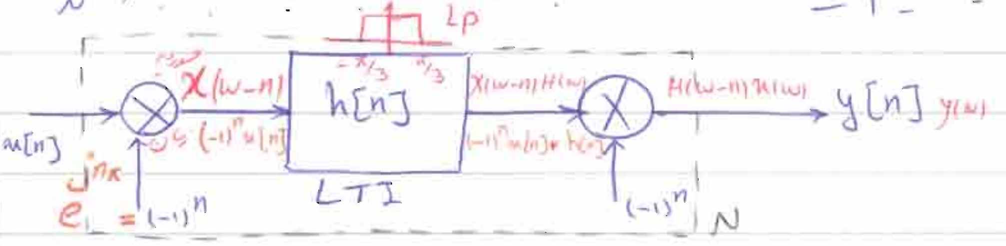
① $\rightsquigarrow \sin\frac{2\pi}{3}n = \cos(\frac{2\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}) \rightarrow |H(j\frac{2\pi}{3})| = 1 \ \&\ \measuredangle H(e^{j\frac{2\pi}{3}}) = -\frac{\pi}{2}$

$x_2[n] = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{1}\frac{2}{3}\cos k\frac{2\pi}{3}n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}n$

$\longrightarrow y_2[n] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}n$

(مثال مهم) ۲. م

آیا سیستم N ، LTI است؟ درصورت مثبت بودن جواب $H_N(\omega)$

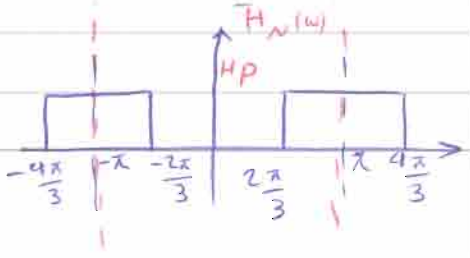


کدام است؟

$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = ? = H(\omega-\pi) \rightsquigarrow$ پس سیستم N این پاسخ فرکانسی یک LTI را

$\hookrightarrow$ فیلتر بالاگذر

$h_N[n] = (-1)^n h[n]$



5) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 x[n] = -\frac{d^2 X(\omega)}{d\omega^2}\Big|_{\omega=0}$

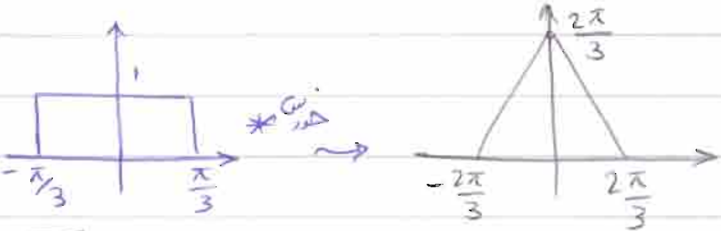
$\sum -n^2 x[n] e^{-j\omega n} = \frac{d^2}{d\omega^2} X(\omega)$

6) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$

7) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega)\Big|_{\omega=0}$

$x[n] \cdot x[n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega)$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{3} n}{\pi^2 n^2} = \boxed{1/3}$



$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi}{3} = \boxed{1/3}$

: 3 81

84 سراسری

$A = X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta(\omega - \frac{k\pi}{2})$ $\quad x[6] = ?$

تبدیل فوریه ضربه باشد سیگنال متناوب است :

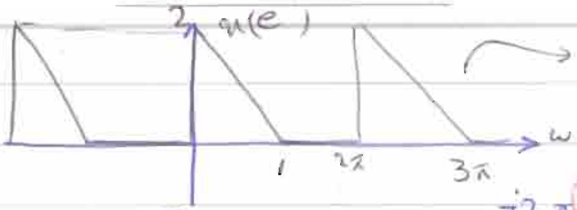
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = A$

$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow N = 4$

$\pi(-1)^k = 2\pi a_k \longrightarrow a_k = \frac{1}{2}(-1)^k$

$x[6] = x[2]$

$x[n] = \sum_{k=0}^{3=N-1} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} \xrightarrow[n=2]{} x[2] = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2}(-1)^k (-1)^k = \boxed{2}$



$\curvearrowright$ تبدیل فوریه حقیقی است.

912

سراسری ۹۰

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j2\pi \overset{\frac{\pi}{2}}{\textcircled{t}}} \qquad f(\tfrac{\pi}{2})=?$$

$$\xrightarrow{t=\pi/2} =\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{x[n]+x^*[n]}{2}\right\}(-1)^n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n] = X(e^{j\pi})$$

$$=\left\{\frac{X(\omega)+X^*(-\omega)}{2}\right\}\Bigg|_{\omega=\pi} \boxed{=0}$$

$$x[n]=(\tfrac{1}{2})^n u[n] + 3^n u[-n]$$

411

$$y(e^{j\omega}) = 6\,X_I(\omega+\tfrac{\pi}{2})$$

$$\overset{x[n]}{X(\omega)} \longrightarrow \overset{z[n]=e^{-j\frac{\pi}{2}n}x[n]}{X(\underset{②}{\omega}+\tfrac{\pi}{2})} \longrightarrow \overset{\frac{z[n]-z[-n]}{2j}}{X_I(\underset{③}{\omega}+\tfrac{\pi}{2})} \xrightarrow{①} 6X_I(\omega+\tfrac{\pi}{2})$$

$$② \rightarrow e^{j\omega_0 n} x[n] \longrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

③ $\curvearrowright$ $\textcircled{*}$ ← چون x[n] مختلط است نمی‌توان
star را حذف کرد

$$\frac{x[n]-x[-n]}{2j} \longrightarrow X_I(\omega) = \frac{X(\omega)-X^*(\omega)}{2}$$

$$① \longrightarrow 6X_I(\omega+\tfrac{\pi}{2}) = 6\,\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}n}x[n] - e^{j\frac{\pi}{2}n}x[-n]}{2j} = y[n]$$

$$y[1] = 6\,\frac{\overset{-j}{e^{-j\frac{\pi}{2}}}\,\overset{1/2}{x[1]} - \overset{j}{e^{j\frac{\pi}{2}}}\,\overset{1/3}{x[-1]}}{2j} = 6\,\frac{-5/6\,j}{2j} = \boxed{\frac{-5}{2}}$$

تبدیل لاپلاس:

$x(t) \longrightarrow X(s)$ تبدیل لاپلاس دوطرفه

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$

فوریه یک حالت خاص لاپلاس است.

فوریه برای زمانی است که $\sigma + j\omega = $ صفر باشد.

اگر سیگنال علّی باشد قسمت‌های منفی حذف می‌شود که اصطلاحاً به آن تبدیل لاپلاس یکطرفه می‌گویند. رابطه آن به شکل زیر است:

$$X_u(s)=\int_{0}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$

تبدیل لاپلاس یکطرفه

$x(t)=0 \quad \forall t<0$ سیگنال علّی

①

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)\,e^{-\sigma t}\,e^{-j\omega t}}_{A}\,dt$$

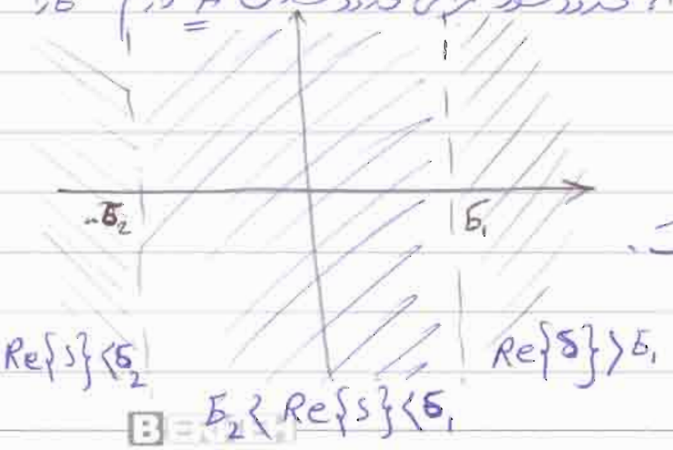
یعنی تبدیل لاپلاس تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ است

$$= F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

برای همه شرط همگرایی در $S=\sigma+j\omega$ قسمت حقیقی مهم است یعنی: $Re\{s\}$

انتگرال ① برای اینکه همگرا شود باید A محدود شود برای محدود شدن A لازم σ را

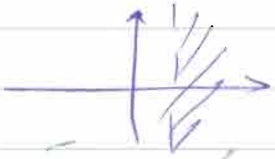
در نظر بگیریم که قسمت حقیقی است.



ROC نوارهای موازی محور $j\omega$ است.

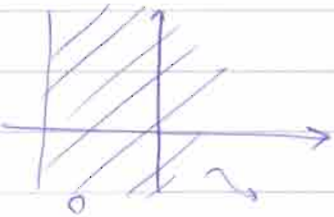
سیگنالی که Roc اش شامل محور ها نباشد تبدیل فوریه ندارد:

$$X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$



تبدیل لاپلاس $\xleftarrow{\quad}$ $\xcancel{\longrightarrow}$ تبدیل فوریه $\longleftarrow$ یعنی این رابطه برقرار نیست

سیگنالی فوریه داشته باشد مطلقاً انتگرال‌پذیر است ← مطلقاً جمع‌پذیر است.



$\rightsquigarrow S = \sigma + j\omega$ $\quad x(s)\Big|_{s=j\omega} = X(\omega)$

$0 \in Roc$

به شرطی که محور jω جزء Roc شود.

۱۱

راست سیگنال:

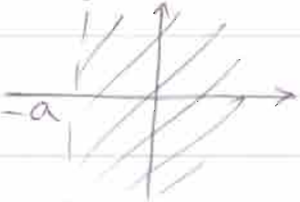
$$x(t) = e^{-at}u(t) \longrightarrow X(s) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\,dt$$

برای راست سیگنال:

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a}}$$

Roc این سیگنال سمت راست است به سمت راست

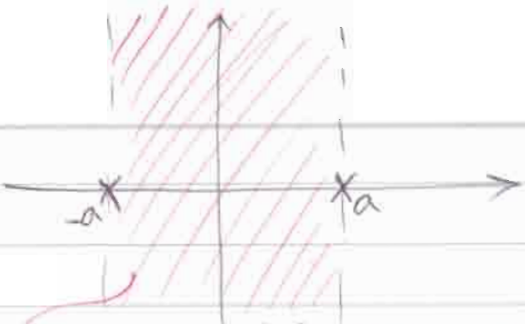
کشیده می‌شود:



بی‌نهایت عنصر Roc باشد معادل علّی بودن آن سیگنال است.

$\infty \in Roc$ ← سیگنال علّی است.

$$X(s) = \frac{2a}{a^2 - s^2}$$



تا بی‌نهایت را دربرداشته باشد. $\leftarrow$ $-a < Re\{s\} < a \Rightarrow Roc$

$\leftarrow$ Roc در سیگنال دوطرفه محدود می‌شود.

۱) $\delta(t)$ $\leftarrow$ سیگنال با دوره محدود

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(s) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-st}\, dt = \boxed{1 \text{ for all } s}$$

یعنی Roc نامحدود می‌شود.

$\leftarrow$ کل صفحه را شامل می‌شود:

در سیگنال محدود $\leftarrow$ Roc نامحدود

در زمان‌ها نامحدود $\leftarrow$ Roc محدود

مثال)

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$$

هردو راستی

$$X(s) = \frac{1/4}{s-1} + \frac{-1/4}{s+3}$$

هردو دست‌چپی

e^{-3t} دست راستی

e^{-t} دست چپی

$\xrightarrow{\text{تا دست چپی‌ها}}$ $-\frac{1}{4} e^{t} u(-t) + 1/4\, e^{-3t} u(-t)$ ①

$\xrightarrow{\text{دوطرفه}}$ $\frac{-1}{4} e^{t} u(-t) - 1/4\, e^{-3t} u(t)$ ②

$\xrightarrow{\text{هردو راستی}}$ $1/4\, e^{t} u(t) - 1/4\, e^{-3t} u(t)$ ③

12) شیفت زمانی :

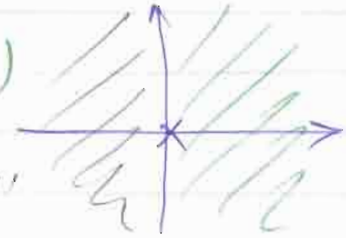
$$x(t) \longrightarrow X(s) \quad ; \quad R$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-t_0 s} X(s) \quad ; R$$

ROC ها با هم برابر است چون قطبی کم یا زیاد نشده است.

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s} \quad ; \ Re\{s\} > 0$$ (سبز)

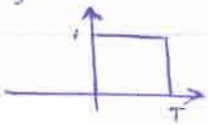
$$-u(-t) \longrightarrow \frac{1}{s} \quad ; \ R\{s\} < 0$$ (مشکی)



یعنی هیچ محور $j\omega$ در ROC قرار نمی‌گیرد. برای همین نمی‌توانستیم u(t) را
به جای $t=j\omega$ بگذاریم.

$$u(t-T) \longrightarrow \frac{e^{-Ts}}{s} \quad ; Re\{s\} > 0$$

مثال) $x(t) = \overset{①}{u(t)} - \overset{②}{u(t-T)}$

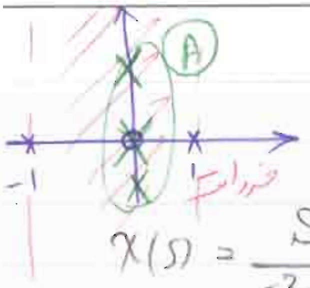


$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

وقتی دو سیگنال ① و ② را از هم کم کردیم قطب $s=0$ حذف شد در $s=0$

$x(s) = \frac{0}{0}$ می‌شود (بعد رفع ابهام T بدست می‌آید) یعنی سیستم کلاً قطب ندارد و ROC
آن کل صفحه می‌شود. البته واضح است که دوره در زمان محدود است پس ROC آن

کل صفحه می‌شود.



نسبت به ساق صفرها و قطب‌ها قرینه‌اند تعدادشان هم فرد است

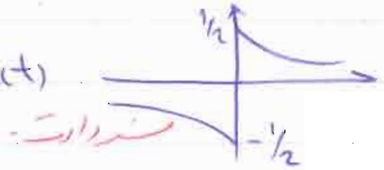
$$X(s)=\frac{s}{s^2-1}$$

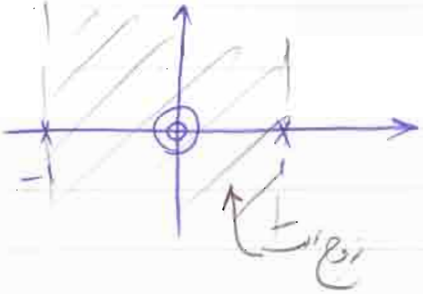
صفر در مبدأ دارد ← می‌تواند فرد باشد: ببینیم تابع تبدیل

$$x(s)=\frac{1/2}{s-1}-\frac{1/2}{s+1}$$

هم فرد است.

$$\rightarrow x(t)=\frac{-1}{2}e^{t}u(-t)+\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$



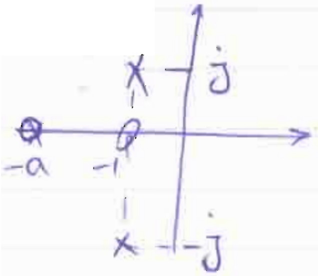


Ⓐ اگر روی ساق قطب داشته باشیم قطعاً نه زوج نه فرد است.

$$X(s)=\frac{s^2}{s^2-1}$$

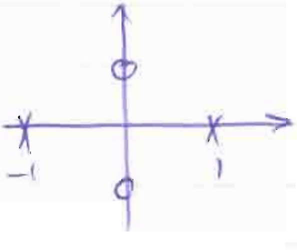
در همه این لاپلاس معکوس‌ها $k=1$ در نظر گرفته شده

در غیر این صورت ، جوابات در k ضرب می‌کنیم.



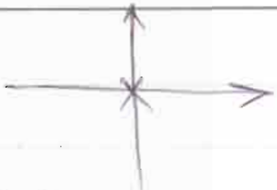
$$\sim\frac{k(s+a)}{s(s^2+2s+2)}$$ ، $c(t)=ke^{-t}\cos(t+\theta)$

$$\frac{dk}{da}=0$$

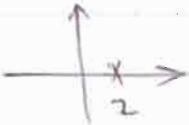


$$X(s)=\frac{s^2+1}{s^2-1}\sim$$ سیگنال زوج است

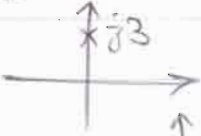
$x(t) = u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$



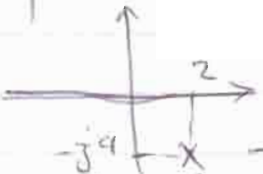
$e^{2t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}$



$e^{j3t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-j3}$

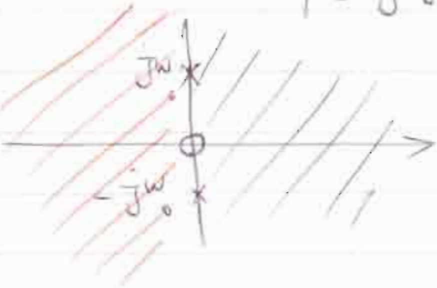


$e^{(2-j4)t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2+j4}$



$-\cos\omega_0 t\, u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right\} = \boxed{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}}$

$\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

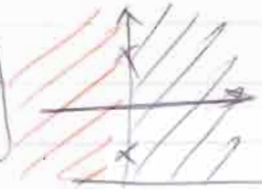


$Re\{s\} > 0 + Re\{j\omega_0\}$

$\longrightarrow \boxed{Re\{s\} > 0}$

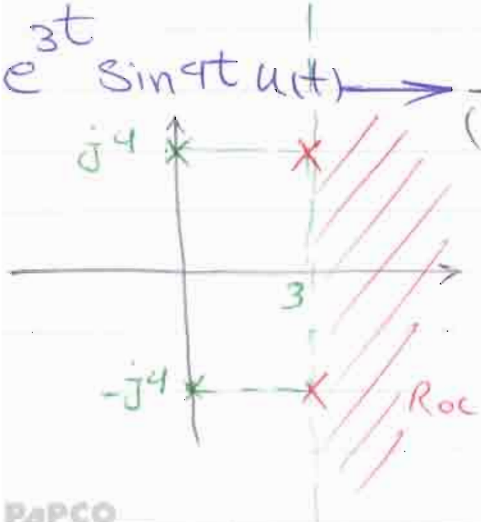
ویژگی ROC

$-\sin\omega_0 t\, u(t) \longrightarrow \boxed{X(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}$

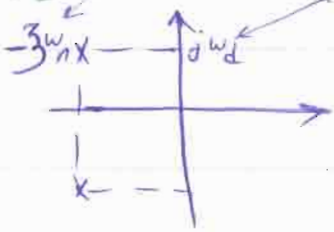


$\boxed{Re\{s\} > 0}$

$e^{3t}\sin 4t\, u(t) \longrightarrow \frac{4}{(s-3)^2+16}$



صورت کلی $e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\theta)$



z: صفر   p: قطب

$x(t) \longrightarrow X(S) \;;R$

۴) Scaling (تغییرمقیاس):

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X(S/a) \quad ; aR$$

قطب: ap   صفر: az

$$\sin t\, u(t) \longrightarrow \frac{1}{s^2+1} \qquad Re\{s\} > 0$$

$$\sin 2t\, u(2t) \longrightarrow \frac{1}{2}\;\frac{1}{(\frac{s}{2})^2+1} = \frac{2}{s^2+4} \qquad Re\{s\} > 0\times 2$$

$\rightarrow Re\{s\} > 0$

$x(t) \longrightarrow X(s) \;;R$

$$x(2t+1) \longrightarrow \frac{1}{2} e^{S/2}\; X(\frac{S}{2}) \;\; ; 2R$$

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "shift"] \arrow[d] & x(t+1) \arrow[r, "scal"] \arrow[d] & x(2t+1) \arrow[d] \\
X(S) & e^{S} X(S) & \frac{1}{2} e^{S/2} X(S/2) \\
R & R & 2R
\end{tikzcd}$$

$\cos 3t\; x(\boxed{-}2t+1) \longrightarrow$

sها ‎-s میشوند

چند مثال بسیار مهم: $x(t)$ سیگنالی مطلقاً انتگرال پذیر است. کدام سیگنال مطلقاً انتگرال پذیر است؟

← معادل فوریه داشتن است.

← $j\omega \in ROC$ است.

۱) $x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s} X(s)$ اگر $X(s)$ حداقل یک صفر در مبدأ داشته باشد، $x_1(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر است.

۲) $x_2(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow X_2(s) = sX(s)$ حتماً انتگرال پذیر است.

قطب در مبدأ ندارد.

۳) $x_3(t) = t^n x(t) \longrightarrow X_3(s) = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$

که در مشتق گرفتن قطبی اضافه نشده و باز هم $j\omega$ را شامل می‌شود پس انتگرال پذیر است

۴) $x_4(t) = \cos 3t \, x(t)$ or $\sin 5t \, x(t)$ ⟶ روی محور جابجا می‌شود

مطلقاً انتگرال پذیر است

5) $x_5(t) = e^{t} x(t) \longrightarrow$ با فرض $-1 \in R_x$ باشد

$\{e^{-st} x(t)\}$ مطلقاً انتگرال پذیر است.

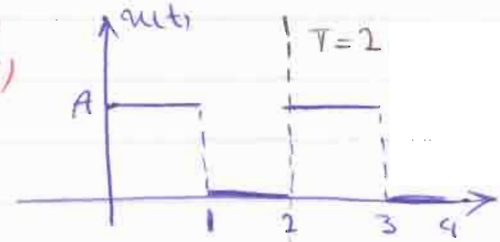
6) $x_6(t) = x(t) * \underbrace{e^{-2t} u(1-3t)}_{Re\{s\}<-2}$ قطعاً انتگرال پذیر نیست چون

اشتراک ROC هر دو سیگنال شامل $j\omega$ نمی‌شود.

$$= x_T(s)\left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots\right)$$

$$X(s) = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-\boxed{T}s}} \longrightarrow$$ دوره تناوب

مثال



$$x_T(t) = A\left(u(t) - u(t-1)\right)$$

$$x_T(s) = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-s}\right)$$

$$X(s) = \frac{\frac{A}{s}\left(1 - e^{-s}\right)}{1 - e^{-2s}} = \frac{\frac{A}{s}}{1 \boxed{+} e^{-s}}$$

دقت شود باید ضریب s نصف دوره تناوب است.

$$X(s) = \frac{A/s}{1 + e^{-s}} \times \frac{1 - e^{-s}}{1 - e^{-s}} = \frac{A/s\left(1 - e^{-s}\right)}{1 - e^{-2s}} \quad X_T(s)$$

مثال / $x(s) = \dfrac{1 + e^{-s}}{2 + e^{-3s}} = ?$

$\dfrac{1}{1+x^2} =$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

تمرین

$tg^{-1} x =$

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$Ln(1+x)$

درجه صورت و مخرج آن مساوی باشد در s ضرب می‌شود s → ∞ ، بی‌نهایت (∞) می‌شود.

پس این نکته در صورتی برقرار است که سیستم اکیداً سره باشد . وقتی سیستم Improper

یا proper است در زمان ضربه و مشتقات ضربه داریم.

$$x(s) = \frac{s+1}{s+2} \longrightarrow x(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$x(0^+) = -1 \longleftarrow$$

$$X(s) = 1 - \frac{1}{s+2} \xrightarrow[I.V.T]{\text{اعمال}} \lim_{s \to \infty} sX(s) = \boxed{-1}$$

ص ۲۱۵ / ص 85 : سیستم علی و LTI :

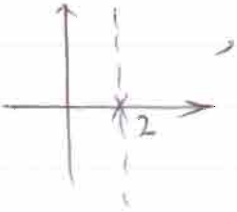
$$H(s) = \frac{1}{s-2} \longrightarrow$$ یک قطب سمت راست ناپایدار دارد

قطب سمت راست دارد

$$x(t) = 3u(t) \qquad y_{ss} = ? \longrightarrow$$ پاسخ پایدار را می‌خواهد

$$y(s) = X(s)H(s) = \frac{3}{s(s-2)}$$

$$sy(s) = \frac{3}{s-2} \longrightarrow$$



اگر دست چپی بود غیرعلی بود و $0 \in Roc$ می‌شد.

اما نکته علی ⟸ دست راستی ، 0 عضو Roc نیست پس ∞ است.

$$\xrightarrow[0 \notin Roc]{\text{علی}} y_{ss} = \infty$$

اگر H(s) کسری گویا باشد ← (Real Rational)

$\frac{e^{-s}}{s+1}$ کسری غیرگویا

$\frac{\sqrt{s}}{s+1}$ ⤴

کسری گویا ← $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$

← شرط علی بودن آن است که ROC H(s) سمت راست، راست‌ترین قطب باشد.

← راست دستی باشد.

$H(s)=\frac{e^{-s}}{s+1}$ $\infty > Re\{s\} > -1$ آیا این سیستم علی است؟

خیر چون H(s) غیرگویا است نمی‌توانیم بگوییم چون ROC راست دستی است پس علی است.

$h(t) = e^{-(t\pm1)}u(t\pm1) \longrightarrow$ (در زمان منفی ← غیرعلی (مقدار دارد)

↳ علی

اگر ROC دست راستی باشد و $\infty \in ROC$ باشد، علی است $\longrightarrow \lim_{s\to\infty} H(s) < \infty$

$\lim_{s\to\infty}\frac{e^{s}}{s+1} = \infty \longrightarrow \infty \notin ROC \longrightarrow$ علی نیست

برای H(s) کسری غیرگویا (یا گویا) شرط علی بودن

۱) ROC دست راستی ۲) $\lim_{s\to\infty} H(s)$ محدود شود

← یعنی گویا Improper نباشد.

۲) خاصیت پایداری:

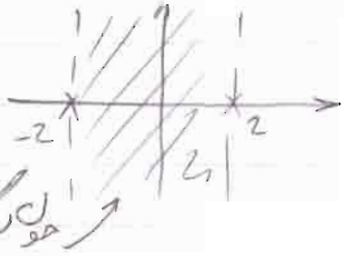
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{186}{84}$ LTI پایدار $4y - y'' = x$ پاسخ به کدام ورودی کراندار است:

$x_1(t) = e^{-t}$ $x_2(t) = e^{-4t}$ $x_3(t) = e^{4t}$

۱، x_1 ۲، x_1 , x_2 ۳، همه ۴، هیچکدام

$H(S) = \frac{1}{4-S^2}$



$1)\ H(-1)\ e^{-t} = \frac{1}{3} e^{-t}$

$3,\ H(1)\ e^{4t} = \infty$

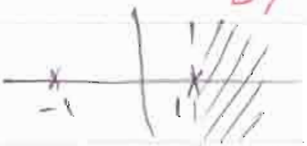
$2,\ H(-4)\ e^{-4t} = \infty$

$\frac{379}{89}$ ، علی $y'' - y = x' + 2x$

$x_1 = e^{2t} \longrightarrow y_1 = H(2) e^{2t} = \frac{4}{3} e^{2t}$

$x_2(t) = e^{-2t} \longrightarrow y_2 = H(-2) e^{-2t} = \infty$

$H(S) = \frac{S+2}{S^2-1}$ علی



سؤال $\frac{240}{35}$ ؛ سیستم LTI و پایدار و علی، H(S) قطب در $S=-2$ و صفری در بینهایت ندارد

✓ $1,\ \{t\ h(t)\}$ علی و پایدار

$2,\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 0$

$3,\ \{h(t)\ e^{3t}\}$ فوریه دارد

PAPCO

LTI

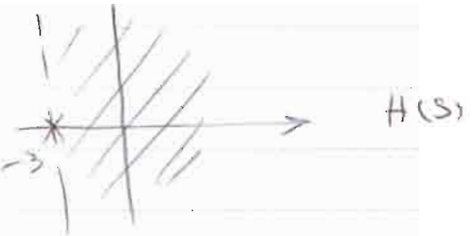
$\frac{291}{87}$

$$\begin{cases} X(S) = \frac{S+1}{S+2} \\ x(t) = 0 \quad t<0 \longrightarrow x(t) \text{ علی است} \end{cases}$$

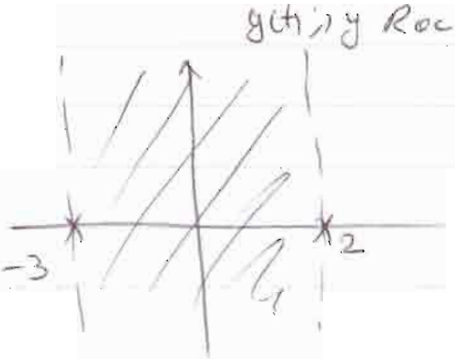
$$y(t) = \frac{2}{5} \overset{\text{سمت راستی}}{e^{-3t}} u(t) \overset{*}{-} \frac{3}{5} \overset{\text{سمت چپ}}{e^{2t}} u(-t) \quad LTI$$

توجه: (–) برای خود فرمول است.

$$y(s) = \frac{2}{5} \frac{1}{S+3} \overset{*}{+} \frac{3}{5} \frac{1}{S-2}$$

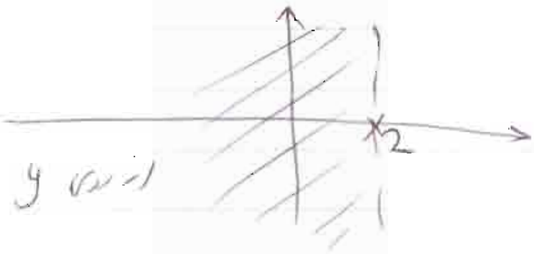


$$y(s) = \frac{S+1}{(S-2)(S+3)}$$



$$H(S) = \frac{y(s)}{X(S)} = \frac{\frac{S+1}{(S-2)(S+3)}}{\frac{S+1}{S+3}} = \frac{1}{S-2}$$

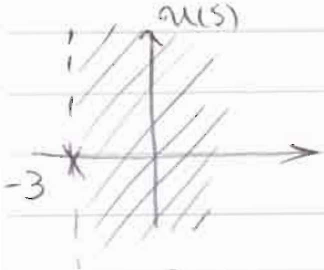
$$H(t) = -e^{2t} u(-t)$$

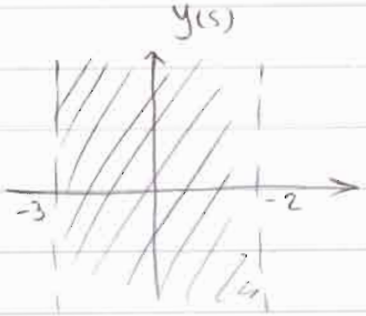


LTI

$\frac{291}{875}$ سراسری

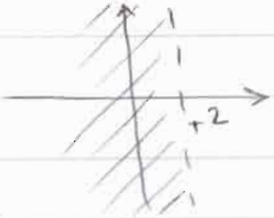
$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{s+1}{s+3} \\ x(t) \quad t<0 \end{cases} \qquad y(t) = \frac{2}{5} e^{-3t} u(t) - \frac{3}{5} e^{+2t} u(-t)$$

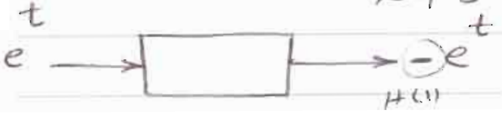




$$y(s) = \frac{2/5}{s+3} + \frac{3/5}{s-2} = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}}{\frac{s+1}{s+3}} = \frac{1}{s-2}$$





$$h(t) = -e^{2t} u(-t)$$

$$y(t) = ? \qquad x(t) = \begin{cases} 4 & t \geqslant 0 \\ 2 & t<0 \end{cases} \qquad \text{که} \; H(s) = \frac{s+1}{s+2}$$ مثال

$$\longrightarrow x(t) = 2 + 2u(t) = 2e^{0t} + 2e^{0t} u(t)$$

$$y(t) = 2e^{0t} H(0) + L^{-1} \left\{ \begin{matrix} \frac{2}{s} \cdot \frac{s+1}{s+2} \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \end{matrix} \right\}$$

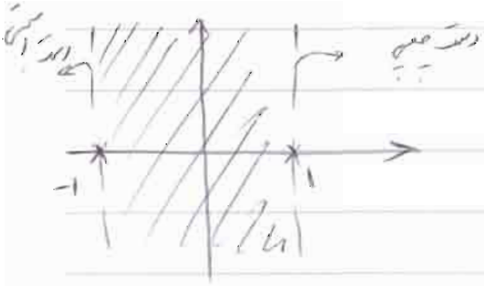
$$y(t) = 1 + (1 + e^{-2t}) u(t)$$

مثال) $h(t)=e^{-|t|}$ $S(t)=?$

$$H(s)=\frac{2}{1-s^2}$$

$$S(s)=\frac{2}{s(1-s^2)}=\frac{2}{s}+\frac{1}{1-s}-\frac{1}{1+s}$$

$$s(t)=2u(t)+e^{t}u(-t)-e^{-t}u(t)$$



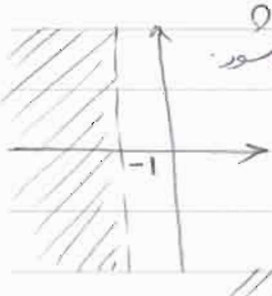
خاصیت وارون پذیری در حوزه لاپلاس:

اگر $H(s)$ کسری گویا باشد: $h(t)*h_i(t)=\delta(t)$; $H_i(s)=\frac{1}{H(s)}$

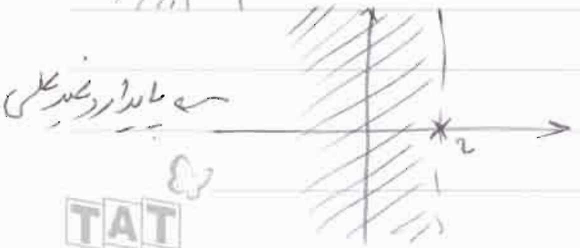
در ROC_{h_i} صفرهای $H(s)$ قطب‌اند. if $ROC_{h_i}\cap ROC_h\neq\phi$

مثال) تبدیل لاپلاس یک سیستم LTI ناپایدار $H(s)=\frac{S-2}{S+1}$ است. معکوس‌های آن را بیابید.

jω را شامل نمی‌شود.



$\rightsquigarrow$ $H(s)$ ناپایدار و غیرعلی

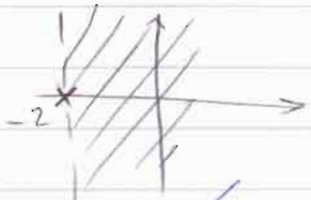


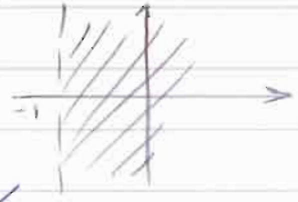
$$H_i(s)=\frac{S+1}{S-2}$$

$$H_i(s)=\frac{S-2+3}{S-2}$$

$$\rightsquigarrow h_i(t)=\delta(t)-3e^{2t}u(-t)$$

مثال) علی و پایدار $H_i(s)=\frac{S+2}{S+1}$ علی و پایدار $H(s)=\frac{S+1}{S+2}$





نکته: وقتی یک سیستم علی و پایدار معکوسش علی و پایدار است که همه ی صفرها و قطب های آن سمت چپ باشند. در این صورت سیستم مینیمم فاز است یعنی $H(s)$ و $H_i(s)$ هر دو علی و پایدار است.

نکته: هر سیستم غیر مینیمم فاز را می توان به صورت یک cascode یک All pass filter و یک سیستم مینیمم فاز نوشت.

$$\frac{S-1}{S+2}=\frac{S-1}{S+1}\cdot\frac{S+1}{S+2}$$

$$|H(S)| = \underbrace{H(S)}_{\text{allpass}} \cdot \underbrace{|H(S)|}_{\text{Min-phase}}$$

در allpass فیلتر صفر و قطب نسبت به $j\omega$ متقارن است.

$|H(j\omega)| = 1$
allpass

all pass فیلتر تقریباً Delay است. چون فقط تغییر فاز می دهد.

مثال) یک سیستم LTI پایدار با پاسخ ضربه $h(t)$ را در نظر بگیرید

تبدیل Z :

$x[n] \longrightarrow x(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \overset{\uparrow}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = F\{x[n] e^{-n}\}$$

$s = \sigma + j\omega$

$$\begin{cases} z = re^{j\omega} \\ r = |z| \\ \measuredangle z = \omega \end{cases}$$

$r \in ROC$

$X(z)$

ROC دوایری به مرکز

صفحه s خواهند شد محور jω لاپلاس معادل دایره واحد Z است.

$e^{\sigma} = r \quad |z| = r = 1$

$e^{\sigma} = r \quad \sigma = 0 \quad |z| = r = 1$

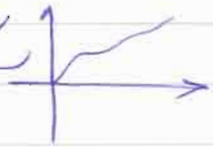
LHP $\sigma < 0$ داخل دایره واحد

RHP $\sigma > 0$ خارج دایره واحد

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \cdots + x[-1] z + x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \cdots$$

نکته: اگر $x[n] = 0 \quad \forall n < 0$ باشد در تبدیل Z فقط توان منفی دارد.

$x[z] = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \cdots$ سیگنال علی



ضد علی $\forall n > 0 \quad x[n] = 0$

$x(z) = \cdots x[-2] z^{2} + x[-1] z^{1} + x[0]$

SUBJECT:

Year: Month: Date: ۵

برای اینکه بفهمیم بی‌نهایت در ROC است یا نه باید جای z بی‌نهایت بگذاریم باید محدود شود:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z}{z-1} = 1 \longrightarrow$$ پس ∞ در ROC است.

۲) دست چپی: ROC داخل، داخلی‌ترین قطب است. $0<|z|<۲$

اگر به ازای یک لحظه مثبت مقدار داشته باشد $ROC = 0<|z|<1$ در غیر این صورت $|z|<۲$ یعنی

مثال) $x[n] = -a^{n} u[-n-1]$ ، $0 \in ROC$ است،

$$\longrightarrow x(z) = \sum_{-\infty}^{-1} -a^{n} z^{-n} = -a^{-1} z - a^{2} z^{-2} + \dots$$

$$|a^{-1} z| < 1 \rightarrow |z| < |a| \qquad = \frac{-a^{-1} z}{1-a^{-1}(z)} \quad \frac{\times a z^{-1}}{} \quad \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\boxed{x(z) = \frac{1}{\cancel{a}\, 1-az^{-1}} \begin{cases} a^{n} u[n] & |z|>|a| \\ -a^{n} u[-n-1] & |z|<|a| \end{cases}}$$

مثال) $(1)^{n} u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1 \qquad z = e^{j\omega}$

$$-u[-n-1] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|<1$$

$$x(j\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega,\ \sigma = 0 \in ROC_x}$$

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega},\ r=1 \in ROC_x}$$

$\delta[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$ Roc کل صفحه ۴) دوره محدود:

$\delta[n+2] \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+2] z^{-n} = z^{2}$ all of $Z-\{\infty\}$

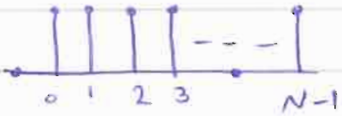
$\delta[n+3] \longrightarrow z^{-3}$ all of $z-\{0\}$

یک سیگنال دوره محدود ROC all $Z - \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ or } \infty \\ \text{or Bath} \end{array}\right\}$

مثال)

$x[n] = u[n]-u[n-N] \longrightarrow 1+z^{-1}+\dots+z^{-(N-1)} = \frac{1(1-(z^{-1})^{N})}{1-z^{-1}}$

$= \boxed{\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}}$



$z=1$ قطب نیست.

$= \delta[n]+\delta[n-1]+\dots+\delta[n-(N-1)]$ Roc all of $z-\{0\}$

خواص تبدیل z:

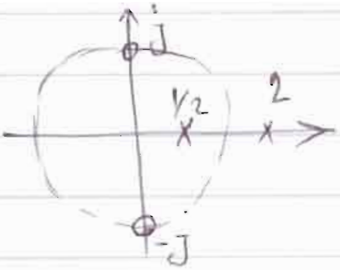
۱) خطی بودن:

$x[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]$

$X(z) = k_1 x_1(z) + k_2 x_2(z)$

$RoC_x \supseteq RoC_{x_1} \cap RoC_{x_2}$

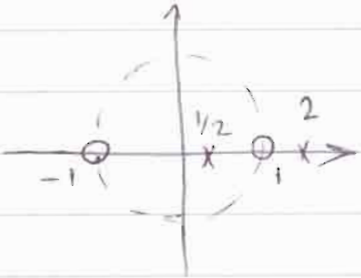
مثال)



سیگنال زوج است.

$\frac{1}{2}<|z|<2$

سیگنال فرد است:



نکته: سیگنال زوج و فرد چون همواره دایره واحد را شامل می‌شود همواره فوریه دارد.

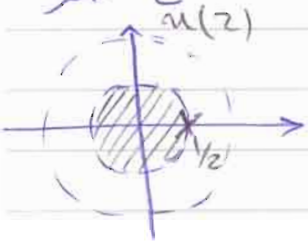
۴)

$x[n] \longrightarrow X(z)$ IR

$z_0^n x[n] \longrightarrow X(\frac{z}{z_0})$ $|z_0|$ IR

قطب p $p.z_0$

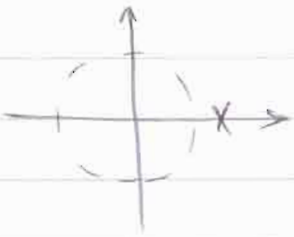
صفر z $z.z_0$



$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $x[n]=-(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

$z_0=3 \rightsquigarrow -(3)^n(\frac{1}{2})^n u[-n-1] \longrightarrow p=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$|z|<3/2$



SUBJECT:

Year / Month / Date / ۸

ـ جلسه پانزدهم ـ

سؤال 187 ـ سراسری 84:

$h[n] \longrightarrow H(z)$ $\quad P_{1,2} = \sqrt{3} e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$

$h_1[n] \triangleq h[n] \cos\frac{n\pi}{4} \longrightarrow$ محل قطب‌های $H_1(z)$

$x[n] \longrightarrow x(z)$ $\quad z, p = P_0 e^{j\omega}$ $\quad Roc: R$

$$z_0^n x[n] \longrightarrow x\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad z_0 z, z_0 p = r_0 P_0 e^{j(\omega+\omega_0)}$$

$z_0 \to re^{j0}$, $e^{j\omega_0}$, $re^{j\omega_0}$ $\qquad Roc: |z_0| R$

[مثال) $\frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} x[n] \to \frac{1}{2} x\left(\frac{z}{e^{j\omega_0}}\right)$]

$$h_1[n] \triangleq \frac{1}{2} h[n] \left(e^{jn\frac{\pi}{4}} + e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right)$$

$\longrightarrow P_1 = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{8}}$ ، $P_2 = \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{8}}$

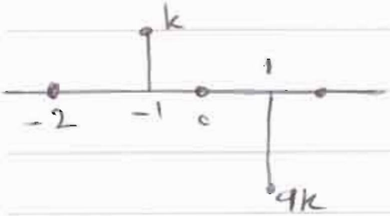
$$P_1' = \begin{cases} \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{8} + j\frac{\pi}{4}} \\ \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{8} - j\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

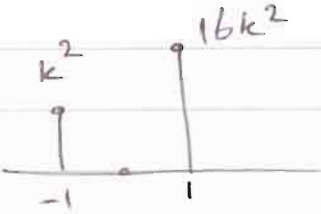
$$P_2' = \begin{cases} \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{8} + j\frac{\pi}{4}} \\ \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{8} - j\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

SUBJECT:

Year / Month / Date 4

$$x[n] = k(\delta[n+1] + 4\delta[n-1])$$





$$y[n] = x^2[n]$$

$$y[n] = k^2\delta[n+1] + 16k^2\delta[n-1]$$

$$y(z) = k^2(z + 16z^{-1}) = k^2\frac{z^2+16}{z}$$

$$\boxed{\text{صفرها} = \mp j4}$$

✓ ۵) خاصیت مشتق‌گیری در حوزه Z :

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{d\,x(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n\,x[n]\,z^{-n-1}$$

$$-z\frac{d\,x(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,x[n]\,z^{-n}$$

$$n\,x[n] \xrightarrow{z} -z\frac{dx(z)}{dz} \quad |z|>|a|$$

$$-z\frac{dx(z)}{dz} = \frac{-1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\frac{dx(z)}{dz} = \frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{z}{z} = \frac{1}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx(z)}{dz} = \int \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \rightarrow \int dx(z) = \int \frac{1}{z+\frac{1}{2}}\, dz$$

$$\rightarrow x(z) = \ln\left(z+\frac{1}{2}\right) \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

$x[n] = |n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$, $x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$, $x(z) = ?$ تمرین :

$$x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$

$$\downarrow \; |z| > \frac{1}{2} \qquad \downarrow \; \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})} \quad |z| < 2 \qquad \boxed{1 < |z| < 2}$$

$x[-n] = x[n]$ سیگنال زوج است و ROC باید بین دو مقدار باشد.

$x(z) = x(z^{-1})$

قطب p باشد $\leftarrow \frac{1}{p}$ صفر z باشد $\leftarrow \frac{1}{z}$

$x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ سیگنال فرد

$$x(z^{-1}) = -x(-z) \qquad a < Roc < b$$

سؤال ۱۰۹، آزاد ۸۱ :

$$H(z)=\frac{6z^{-3}+2z^{-2}+2z^{-1}+3}{2z^{-3}+3z^{-2}+4z^{-1}+2}$$

حل $\rightarrow h[0]=\frac{3}{2}$

$$h[1]=\underset{z\to\infty}{z}\left\{H(z)-h[0]\right\}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$H(z)-h[0]=\frac{6z^{-3}+2z^{-2}+2z^{-1}+3}{2z^{-3}+3z^{-2}+4z^{-1}+2}-\frac{3}{2}=\frac{6z^{-3}-5z^{-2}+\cdots-8z^{-1}+0\times z}{4z^{-3}+6z^{-2}+8z^{-1}+4}$$

قضیه مقدار نهایی :

$$x[\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)$$

$$=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})X(z) \qquad 1\in ROC\ (1-z^{-1})X(z)$$

$x(z)$ حداقل یک صفر در $z=1$ داشته باشد.

سؤال 206، آزاد 84 :

$$x(z)=\frac{3}{z-1/4-\frac{1}{8}z^{-1}}$$ $x[n]$ مطلق انتگرال پذیر

$$\rightarrow x(z)=\frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-1/8\,z^{-2}}=\frac{4}{1-1/2\,z^{-1}}+\frac{-4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$z^{-1}=2 \leftarrow (1-\frac{1}{2}z^{-1}) \leftarrow z^{-1}$ برای تجزیه کسر به

$$\sum_{K=-\infty}^{n} x[n] = x[n] * u[n] \longrightarrow x(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \quad R \supset R \cap \{|z|>1\}$$

اگر $x(z)$ حداقل یک صفر در $Z=1$ داشته باشد یا $x(z)$ صفری در $z=1$ نداشته باشد

مثال)
$$y(z) = \overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}^{x(z)} \cdot \overbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}^{u(z)}$$

$$|z|>\tfrac{1}{2} \qquad |z|>1 \qquad R_y = R_x \cap \{|z|>1\}$$

$$= |z|>1$$

تبدیل z برای down-s , up-sampler :

up-sampler :

$$x[n] \longrightarrow x(z)$$

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n: \text{مضرب } m \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$y(e^{j\omega}) = x(e^{j\omega}) \quad , \quad y(z) = x(z^m) \quad ; \quad R^{1/m}$$

مثال)
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n = 0, 3, 6, \ldots \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \qquad x(z) = ? \qquad Roc = ?$$

$$\xrightarrow{\text{تخصیص می‌دهیم}} y[n] = \left(\frac{1}{27}\right)^n u[n] \qquad x[n] = \begin{cases} y\left[\frac{n}{3}\right] & n = 3k \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{27}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{27} \qquad x(z) = y(z^3) = \frac{1}{1-\frac{1}{27}z^{-3}}$$

$$|z| > \tfrac{1}{3}$$

SUBJECT:

Year: Month: Date: 13

$$y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2} X(-e^{j\frac{\omega}{2}})$$

$$y(z) = \frac{1}{2} x(z^{1/2}) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2}) \qquad Roc = R^2$$

$$y[n] = x[2n]$$

$$y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[2n] z^{-n} \qquad 2n=m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-(\frac{m}{2})}$$ $m = 2L$ زوج است.

برای از بین بردن مقادیر زوج در بازه جمع ، در یک $\frac{1}{2}(1+(-1)^m)$ ضرب می‌کنیم:

$$y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (1+(-1)^m) x[m] (z^{1/2})^{-m}$$

تبدیل z که به جای z آن مقدار $z^{1/2}$ قرار داده است

$$y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\pm\infty} \frac{1}{2} x[m] (z^{1/2})^{m} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} x[m] (-z^{1/2})^{-m}$$

$$= \frac{1}{2} X(z^{1/2}) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2})$$

۷) خاصیت مزدوج گیری در حوزه زمان:

$x[n] \longrightarrow x(z)$ Roc : R

$x^*[n] \longrightarrow X^*(z^*)$: R

$$x_T[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] \qquad \frac{x_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

$$\xrightarrow{z} [z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}] \cdot \frac{1}{1-z^{-4}} = \frac{z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}}{1-z^{-4}} \qquad \frac{X_T(z)}{1-z^{-N}}$$

مثال)

$$x(z) = \frac{z^5 - 3}{1-z^{-5}} \qquad x[n] = ?$$

$$x(z) = \frac{z^5 - 2 - 1}{1-z^{-5}} = \frac{z^5 - 1}{1-z^{-5}} - \frac{2}{1-z^{-5}}$$

$$\rightarrow x(z) = z^5 - \frac{2}{1-z^{-5}}$$

$$x[n] = \delta[n+5] - 2\sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-5k]$$

بررسی خواص سیستم‌های LTI از روی تبدیل Z:

۱) علی بودن:

۱) Roc بیرونِ بیرونی ترینِ قطب

۲) $\infty \in Roc_{H(z)}$ باشد ← درجه صورت $X(z)$ از درجه مخرج بیشتر نباشد.

۲) پایداری:

$$|z| = 1 \in Roc\ H(z)$$

سؤال 261ـ آزاد 86 :

$h[n] = \frac{1}{n!} u[n]$ LTI

$x[n] = (-0.5)^n$ $y[0] = ?$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{1!} z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{3!} z^{-3} + \cdots = e^{z^{-1}}$$

$$(0.5)^n \longrightarrow \boxed{H(z) = e^{z^{-1}}} \longrightarrow (0.5)^n e^{-2} = y[n]$$

$$y[0] = \frac{1}{e^2}$$

سؤال ۲۹ـ سراسری ۷۹ :

$$H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1+\frac{1}{2} z^{-1}}$$ علی، LTI

$$x[n] = \begin{cases} 1+3^n & n \geqslant 0 \\ 1 & n < 0 \end{cases}$$ $y[n] = ?$

$$x[n] = \overset{A}{1} + \overset{a^n u[n]}{3^n u[n]}$$ $H(z) \rightarrow |z| > 1/2$

$$1 \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow 1\,H(1) = -\frac{4}{3}$$

$$3^n u[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2} z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

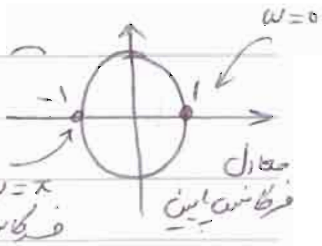
$$\downarrow$$

$$\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$y[n] = \begin{cases} -\frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & n \geqslant 0 \\ -\frac{4}{3} & n < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n] = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi}$$

$$\equiv H(z)\Big|_{z=-1}$$



سؤال 221 _ سراسری 85، LTI علی شامل یک صفر و یک قطب

$H[0]=1$ ، $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]=4$ ، $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n]=0$ ، $H(z)=?$ ، $h[n]=?$

$$H(z) = k\,\frac{z-z_0}{z-p_0}$$

$$h[0]=1=\lim_{z\to\infty} H(z)=k \qquad h=1$$

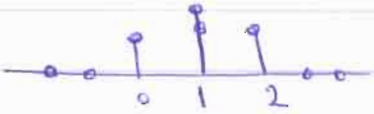
$H(1)=4$ $\qquad$ $H(-1)=0 \rightarrow z+1 \rightsquigarrow$ صفر تابع تبدیل است چون تابع تبدیل صفر شده

$$H(1)=\frac{z+1}{z-p_0}=4 \qquad p_0=1/2$$

$$Z(z)=\frac{z+1}{z-1/2} \xrightarrow{z^{-1}} h[n]=$$

سیستم های LTI $\begin{cases} \text{FIR} \\ \text{LIR} \end{cases}$

مثال، $h_1[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$ $\qquad$ FIR



نکته: سیستم های FIR در ساختارشان فیدبک ندارد ولی سیستمهای IIR در ساختارخود دارای فیدبک هستند.

نکته) سیگنال زوج دارای فاز صفر است.

نکته: اگر سیستم FIR باشد فاز برحسب ω خطی است.

$y[n] = h[n+1]$

$y(\omega) = e^{j\omega} H(\omega)$ $\quad \measuredangle y(\omega) = \omega + \measuredangle H(\omega) \quad \measuredangle H(\omega) = -\omega$

وارون سیستم LTI :

$H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$

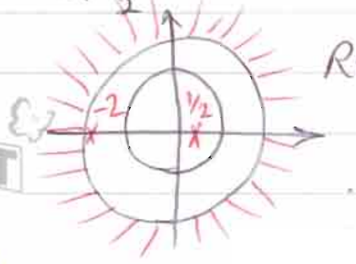
$R_{H_i} \cap R_H \neq \emptyset$

سوال 82، سراسری 84:

$h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \underbrace{\delta[-n+2]}_{\delta[n-2]}$ ⟶ وارون علی سیستم

$H(z) = 1 + \frac{3}{2} z^{-1} - z^{-2} = \frac{z^2 + \frac{3}{2} z - 1}{z^2}$

$H_i(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} z^{-1} - z^{-2}} = \frac{1}{(1+2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{}{(1+2z^{-1})} + \frac{}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$



ROC $|z|>2$ FIR نیست چون قطب در صفر ندارد.
IIR است.
ولی ناپایدار است چون خارج دایره واحد قطب دارد و علی است.

$$T(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}+(2+k)z^{-2}}$$

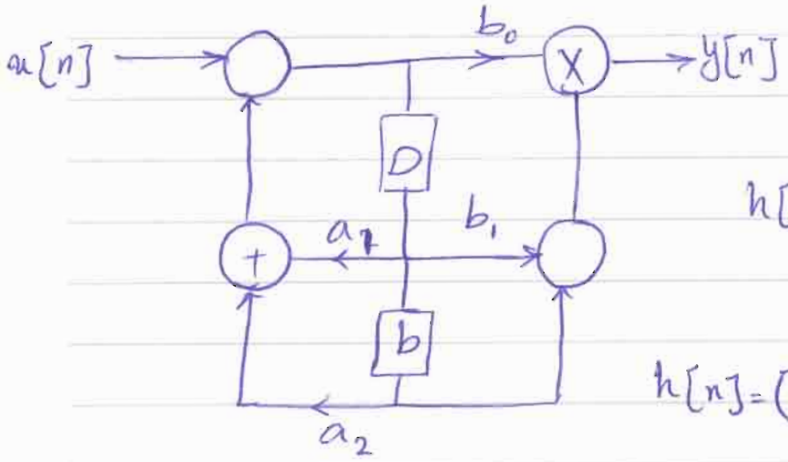
$|2+k|<1 \rightarrow -1<k+2<1$

$\rightarrow -3<k<-1$

$\rightsquigarrow 2<1+2+k \rightsquigarrow k>-1$ به ازای تمام kها ناپایدار است و جواب ندارد

سؤال 324 _ سراسری 88 :

عملی



$$h[n] = \begin{cases} 4 & \text{زوج باشد } n \\ 6 & \text{فرد باشد } n \end{cases}$$

$h[n] = [5-(-1)^n]\ u[n]$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+z^{-2}}{1-[a_1z^{-1}+a_2z^{-2}]} = H(z) = \frac{5}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{4+6z^{-1}}{1-z^{-2}}$$

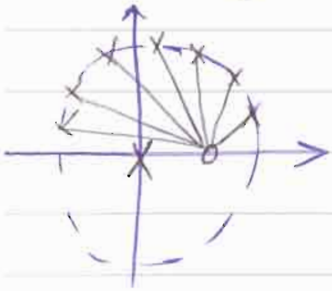
$a_1 = 0$ $b_0 = 4$

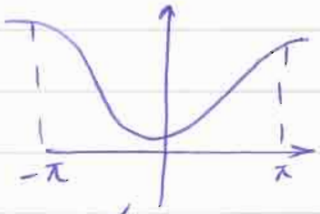
$a_2 = 1$ $b_1 = 6$

فیلترهای دیجیتال :

$z = e^{j\omega}$

$H(z)=\frac{z-a}{z}$ $0<a<1$



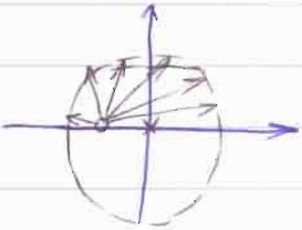


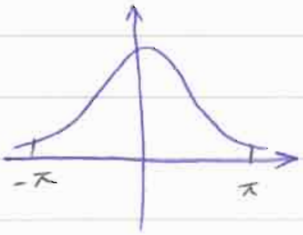
صفر سمت راست قبل قطب
سمت چپ عمل می‌کند.

صفر سمت چپ قبل قطب سمت راست عمل می‌کند.

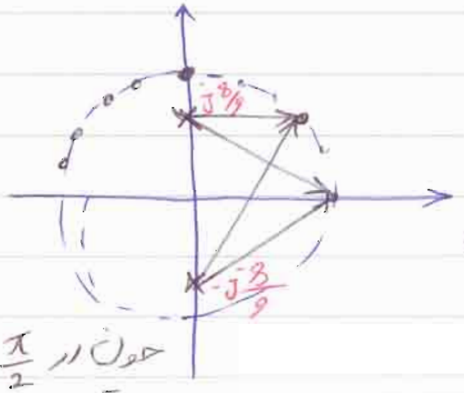
$H(z)=\frac{z-a}{z}$

$-1<a<0$

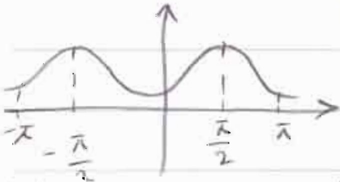




مثال) $H(z)=\frac{1}{1+\frac{64}{18}z^{-2}}$



Bpf



چون در $\frac{\pi}{2}$ مخرج نزدیک است ولذا بوجود است پس پیک هم در فرکانس بالا هم در فرکانس پایین نسبتاً کم است.

$$\begin{cases} H(1)=\frac{81}{145} \\ H(j)=\frac{81}{17} \\ H(-1)=\frac{81}{145} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ فرکانس میانی را عبور می‌دهد

نکته: وجود تک قطب Lp-Hp است ولی وجود قطب‌ها مختلط BSF-Bpf هر چقدر نزدیک به محور Im باشد Bpf است و هر چقدر نزدیک محور Re باشد BSf

سؤال ۹۰۹ سراسری ۹۰:

$$H(z) = \frac{1+z^2}{0.5+z^3}$$

$|H(1)| = \frac{4}{3}$ یعنی در فرکانس های بالا باید

$|H(j)| = 0$ زیاد باشد و در π صفر باشد.

$|H(-1)| = 4$ گزینه ۱.

سؤال 326 سراسری 88:

$$y[n] + \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{3}{8} y[n-2]$$

$$4x[n-2] + x[n-1] - \frac{3}{2} x[n]$$

$$H(z) = \frac{-3/2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1/4\, z^{-1} - \frac{3}{8} z^{-2}} = \frac{}{(1+3/4\, z^{-1})(1-1/2\, z^{-1})}$$

قطب ها: $1/2$ $-3/4$

$|H(1)| =$ صفرها 2 $-\frac{4}{3}$

$|H(j)| =$ $\longrightarrow$ All pass : هر سه مساوی می شود

$|H(-1)| =$ محل صفرها و قطب نسبت به دایره واحد قرینه می شود

سؤال 283 سراسری 87: پایین گذر FIR

۱، $p_1=0; z_1, z_2 = 0.95e^{\pm j0.02\pi}$ چون FIR است قطب ها باید

۲، $p_1 = 0$ و $z_{1,2}$ در مبدأ باشد گزینه 3 و 4

حذف می شود.